1. Który z poniższych wzorów na $E(T(x))$ (x - całkowity wiek) jest prawdziwy przy założeniu o stałym natężeniu wymierania osób z danego rocznika ($\mu_{x+k+0,5}$ oznacza poziom natężenia wymierania w przedziale wiekowym $(x+k, x+k+1)$) ?

(A) $E(T(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}_k p_x \; q_{x+k}}{\mu_{x+k+0,5}} - \frac{1}{2}$

(B) $E(T(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{}_k p_x \; q_{x+k}}{\mu_{x+k+0,5}}$

(C) $E(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}_k p_x \; q_{x+k}}{\mu_{x+k+0,5}} + \frac{1}{2}$

(D) $E(T(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{}_k p_x \; q_{x+k}}{\mu_{x+k+0,5}} + \ln 2$

(E) żaden ze wzorów nie jest prawdziwy.

2. W populacji o jednostajnym rozkładzie śmiertelności przypadającej na osoby danego rocznika wiadomo, że:

$$\ddot{a}^{(4)}_{x:\overline{n}|} - a^{(4)}_{x:\overline{n}|} = 0.23763 \qquad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 7{,}55693 \qquad i = 10\% \quad .$$

Podaj najbliższą wartość $\ddot{a}^{(4)}_{x:\overline{n}|}$.

(A) 7.16 (B) 7.19 (C) 7.22 (D) 7.25

(E) 7.28

3. W populacji de Moivre'a z granicznym wiekiem 100 lat ${}_{20}E_{50} = 0.08117$.

Podaj najbliższą wartość $\bar{a}_{50:\overline{20|}}$.

(A) 7.46 (B) 7.50 (C) 7.54 (D) 7.58
(E) 7.62

4. W populacji Weibulla, w której $\mu_x = 0.0001x^{1.5}$, wiadomo, że dla $\delta = 0.08$

$$\bar{a}_{40} = 8.8 \ .$$

Podaj, o ile procent zmieni się składka dla osoby o miesiąc starszej. Podaj najbliższą wartość,

(A) -0.15% (B) -0.13% (C) -0.11% (D) -0.09%
(E) -0.07%

5. Za pomocą regularnych składek rocznych, płatnych na początku roku, osoba (30) kupuje następujące ubezpieczenie 20-letnie: jeśli umrze w ciągu najbliższych 20 lat to zostanie uruchomiona renta roczna w wysokości 10 000 zł; przy czym pierwsza wypłata następuje w pierwsze urodziny polisy, które następują po jego śmierci, a ostatnia rata wypłacana jest w 19-tą rocznicę polisy (ciągu wypłat nie może być przerwany przez śmierć kolejnych uposażonych). Dane są ponadto:

$$D_{30} = 22000\ , \qquad D_{40} = 13000\ , \qquad i = 5\%$$
$$N_{30} = 380000\ , \qquad N_{40} = 200000\ , \qquad N_{50} = 100000$$
$$l_{30} = 96500\ , \qquad l_{40} = 93000$$

Oblicz rezerwę składek netto po 10 latach. Podaj najbliższą wartość.

(A) 1500 (B) 1900 (C) 3000 (D) 4500
(E) 6000

6. Zakładamy, że w rozważanej populacji trwanie życia ma rozkład wykładniczy z $\mu = 0.02$. Rozważamy 30-letnie ubezpieczenie na życie (*x*), płacące w momencie śmierci świadczenie malejące według wzoru:

$$c(t) = e^{-0.05t} \text{ dla } t < 30 \text{ oraz } c(t) \equiv 0 \text{ dla } t \geq 30.$$

Techniczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 0.03$. Schemat płacenia składek jest następujący:
Część składki jednorazowej $f \cdot SJN$ wnosi się natychmiast, a pozostałą część rozkłada się na rentę życiową, ciągłą, 30-letnią o stałej intensywności. Przy czym jako f wybrano najmniejszą liczbę z przedziału [0,1] spełniającą tezę:

dla każdego $t \in [0,30], V(t) \geq 0$.

Oblicz (podaj najbliższą wartość) f.

(A) 0.535 (B) 0.585 (C) 0.635 (D) 0.685
(E) 0.735

7. W 20-letnim ubezpieczeniu na życie (x) składka brutto P=2 500 zł jest płacona przez cały okres ubezpieczenia na początku roku.

Roczne koszty administracyjne, według wartości na początek roku, wynoszą w pierwszych 10 latach ubezpieczenia 10% składki brutto, a następnie 20% składki brutto w pozostałym okresie.

Wyznacz (podaj najbliższą wartość) rezerwę na koszty administracyjne po 5 latach ubezpieczenia. Dane są:

$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 8.425$ $\ddot{a}_{x+5:\overline{15}|} = 7.460$ $\ddot{a}_{x+10:\overline{10}|} = 6.078$

${}_5E_x = 0.582$ ${}_5E_{x+5} = 0.563$

(A) 415 (B) 430 (C) 445 (D) 460

(E) 475

8. Bezterminowe ubezpieczenie dla (x) wypłaca j zł na koniec roku wyjścia ze statusu z powodu szkody j ($j = 1,2,3$). Niech $\Lambda_{j,k}$ oznacza stratę ubezpieczyciela ulokowaną w roku (k+1). i przypisaną szkodzie j. Dane są:

$$_{16}V = 0{,}8 \quad , \quad q_{1,x+15} = 0{,}02 \quad , \quad q_{2,x+15} = 0{,}01 \quad , \quad i = 4\% \,.$$

Obliczyć $Cov(\Lambda_{1,15}, \Lambda_{2,15} | K \geq 15)$.

(A) 0.00001 (B) 0.00004 (C) 0.00007
(D) 0.0001 (E) 0.00013

9. Niech Z_m oznacza wartość obecną wypłaty 1 zł, dokonywanej na koniec roku śmierci męża (*m*), jeśli umrze wcześniej niż żona (*k*); symbol Z_k ma analogiczne znaczenie. Dane są:

$$i = 5\% \quad \text{oraz} \quad \ddot{a}_{m:k} = 14.7$$

Wiemy ponadto, że $E(Z_m) > E(Z_k)$ oraz jeśli sprzedamy obie polisy temu samemu małżeństwu to:

$$Cov(Z_m, Z_k) = -0.02$$

Rozważmy teraz polisę, która wypłaca 100 000 zł na koniec roku śmierci męża, jeśli umrze wcześniej niż żona albo 20 000 zł na koniec roku śmierci żony, jeśli ona umrze wcześniej.
Oblicz regularną roczną składkę netto płatną na początku każdego roku aż do pierwszej śmierci. Podaj najbliższą wartość.

(A) 1500 (B) 1550 (C) 1600 (D) 1650
(E) 1700

10. W planie emerytalnym przejście na emeryturę możliwe jest w ciągu 10 lat między 55 a 65 rokiem życia, a każdy inny ubytek wywołuje te same skutki finansowe co emerytura. Wiadomo, że kohorta osób w wieku 55 lat będzie ubywać z planu ze stałą gęstością.

Plan wypłaca emeryturę roczną w wysokości 3% wynagrodzenia z całego okresu zatrudnienia. Jednostkowy koszt świadczenia emerytalnego (na moment wyjścia z planu) opisuje funkcja $\bar{a}_{55+t} = 20 - 0.4t$, dla $0 \le t \le 10$.

Pracodawca wypłaca raz w roku, na początku roku, składkę kapitalizującą emerytalny koszt rocznego wynagrodzenia. Wynagrodzenia pracowników opisuje funkcja $\bar{w}_{55+t} = 20000 \cdot 1.03^t$, dla $0 \le t \le 10$.

Podaj najbliższą wartość tegorocznej składki na pracownika w wieku 55 lat, przy stopie technicznej $\delta = 0.05$.

(A) 8505 (B) 8555 (C) 8605 (D) 8655
(E) 8705

XX Egzamin dla Aktuariuszy z 9 grudnia 2000 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	A	
4	E	
5	D	
6	C	
7	A	
8	B	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.