1. 1000 par mąż-żona spotkało się 31.12.2000 r. Wszyscy mężowie są urodzeni 01.10.1960 r., a wszystkie żony 01.10.1970 r. Ile par spotka się najprawdopodobniej 31.03.2031 r., jeśli jedyną przyczyną nieobecności może być tylko śmierć. Wiemy, że:

mężowie: ${}_{29}p_{41} = 0.9$ $q_{40} = 0.001$ $q_{70} = 0.005$

żony: ${}_{29}p_{31} = 0.95$ $q_{30} = 0.0005$ $q_{60} = 0.003$

Zakładamy liniowy rozkład umieralności w ciągu roku.

(A) 793 (B) 797 (C) 822 (D) 847
(E) 851

2. Wiadomo, że $A^{1}_{x:\overline{20|}} = 0.2$ oraz $(IA)^{1}_{x:\overline{20|}} = 0.75 \cdot (DA)^{1}_{x:\overline{20|}}$. Wyznacz $(DA)^{1}_{x:\overline{20|}}$

(podaj najbliższą wartość)

(A) 2.25 (B) 2.4 (C) 2.55 (D) 2.7

(E) 2.85

3. Niech Y oznacza wartość obecną dożywotniej renty ciągłej dla (x), płacącej z intensywnością 1 na rok. Załóżmy ponadto, że $\mu_{x+t} \equiv \mu > 0$ oraz że intensywność oprocentowania $\delta > 0$.

Jeżeli $E\left[(Y - E(Y))^3\right] = 0$, to

(A) $\mu = \delta$ (B) $\mu = 2\delta$ (C) $\mu = 3\delta$

(D) $\mu = \frac{\delta}{2}$ (E) $\mu = \frac{\delta}{3}$

4. Osoba (x) rozważa zakup jednego z dwóch bezterminowych ubezpieczeń na życie:

- zwykłego, z sumą ubezpieczenia 100 000 płatną na koniec roku śmierci,
- indeksowanego, z sumą ubezpieczenia 100 000 rosnącą według technicznej stopy $i = 5\%$, wypłacaną na koniec roku śmierci.

Roczna składka netto za ubezpieczenie indeksowane jest o 159% wyższa od składki rocznej w zwykłym ubezpieczeniu. Oblicz składkę roczną w zwykłym ubezpieczeniu (podaj najbliższą wartość).

(A) 2600 (B) 2700 (C) 2800 (D) 2900
(E) 3000

5. W bezterminowym ubezpieczeniu na życie z sumą ubezpieczenia 100 000 (płatną na koniec roku śmierci), składka netto powinna być płatna dożywotnio na początku każdego roku w stałej kwocie P. Po k latach ubezpieczony przerwał płacenie składki i uzyskał ubezpieczenie bezskładkowe na sumę 87 250 zł.
Podaj wysokość składki P , jeśli dane są:

$$v = 0.95 \qquad \ddot{a}_{x+k} = 9.1 \ .$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 735 (B) 750 (C) 765 (D) 780
(E) 795

6. Osoba (x) z populacji de Moivre'a

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t} \quad , \qquad t < \omega - x$$

kupuje ubezpieczenie na życie z wypłatą w momencie śmierci

$$c(t) = (\omega - x - t)^2 \ ,$$

płacąc składkę ze stałą intensywnością $\bar{\pi}$. Wyznacz $\lim\limits_{t \to \omega - x} V'(t)$

(A) $\bar{\pi}$ (B) $\frac{\bar{\pi}}{2}$ (C) $\frac{\bar{\pi}}{3}$ (D) $+\infty$

(E) $-\infty$

7.. Osoba w wieku *x* lat rozważa kupno renty dożywotniej, wypłacającej po *n* latach odroczenia rentę raz w roku, na początku roku. Składka płacona jest raz w roku przez okres odroczenia, na początku roku, w stałej kwocie. Ubezpieczony zastanawia się nad wyborem wysokości renty. Podaj, o ile wzrośnie roczna składka brutto za zakup kolejnych 100 zł rocznej renty.

Dane są:

- $\ddot{a}_x = 19.5$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 7.5$,
- koszty akwizycji i inkasa składki wynoszą 10% składki brutto i są ponoszone w momencie poboru składki,
- koszty administracyjne w okresie składkowym wynoszą 40 zł i są ponoszone na początku roku,
- koszty wypłaty renty wynoszą 5% wypłacanej renty.

Podaj najbliższą wartość.

(A) 178 (B) 181 (C) 184 (D) 187
(E) 190

8. Mąż otrzymuje na początku każdego roku kwotę S złotych. Począwszy od wieku x lat, co rok, opłaca składkę w wysokości P, która zapewni żonie rentę wdowią po jego śmierci z rocznym świadczeniem S-P . Składka ma być płacona do pierwszej śmierci. Oboje są w tym samym wieku i pochodzą z populacji Gompertza

$$\mu_{x+t} = B \cdot 2^{x+t}$$

oraz dane są $v = 0.95$ $q_x = 0.005$ $\dfrac{A_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}} = 0.02$.

Wyznacz $\dfrac{P}{S}$ (podaj najbliższą wartość).

(A) 0.06 (B) 0.07 (C) 0.08 (D) 0.09
(E) 0.1

9. W bezterminowym ubezpieczeniu na życie (x) możliwe jest tylko jedno z dwóch świadczeń:

1. w razie wystąpienia inwalidztwa 20 000 zł płatne na koniec półrocza inwalidztwa,
2. w razie śmierci 10 000 zł płatne na koniec roku śmierci.

Znajdź jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli $v = 0.95$ oraz intensywności ubytków wynoszą odpowiednio:

$$\mu_{x+t}^{(1)} = 0.02 \qquad \mu_{x+t}^{(2)} = 0.01 \quad .$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 5990 (B) 6020 (C) 6055 (D) 7410
(E) 9515

10. Model ciągły opisuje pewien plan emerytalny, w którym emerytura płatna jest z roczną intensywnością równą f % finalnego wynagrodzenia. Uczestnicy planu wstępują do niego w wieku a lat i przechodzą na emeryturę najpóźniej w wieku r lat. Profil wynagrodzenia w cyklu życia opisuje funkcja $w(x)$, $a \le x \le r$, a zmianę wszystkich wynagrodzeń w czasie (inflacja, realny wzrost) funkcja $g(t)$. Kumulację uprawnień emerytalnych wyraża funkcja (*accrual function*)

$M(x) = \dfrac{D_r}{D_x}$, gdzie $D_y = v^y l_y$ jest standardową funkcją komutacyjną dla śmiertelności.

Weźmy kohortę osób, które wstąpiły do planu w momencie u w wieku a lat. Obecnie, w momencie t, mają one x lat. W momencie t składka normalna *(normal cost rate*) za te osoby jest płacona z intensywnością:

(A) $f \cdot e^{-\delta(r-t)} \cdot w(r) \cdot g(t) \cdot \bar{a}_r^h \cdot l(r,t) \cdot M(x)$

(B) $f \cdot e^{-\delta(r-t)} \cdot w(r) \cdot g(t) \cdot \bar{a}_r^h \cdot l(r,t) \cdot M(x) \cdot (\mu_x + \delta)$

(C) $f \cdot e^{-\delta(r-t)} \cdot w(r) \cdot g(t) \cdot \bar{a}_r^h \cdot l(r,t) \cdot M(x) \cdot (\mu_x - \delta)$

(D) $f \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot w(r) \cdot g(t+r-x) \cdot \bar{a}_r^h \cdot l(r,t+a-x) \cdot M(x) \cdot (\mu_x + \delta)$

(E) $f \cdot e^{-\delta(r-x)} \cdot w(r) \cdot g(t+r-x) \cdot \bar{a}_r^h \cdot l(r,t+a-x) \cdot M(x) \cdot (\mu_x - \delta)$

Egzamin dla Aktuariuszy z 19 czerwca 1999 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi.................................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	B	
3	A	
4	E	
5	C	
6	B	
7	D	
8	A	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.