

Zadanie 1.

Rozważamy linie biznesowe A i B. Posiadamy następujące informacje:

	Linia A	Linia B
Składka przypisana brutto	10,000	8,000
Współczynnik kosztów	10%	5%
Współczynnik szkodowości	80%	65%
Kapitał ekonomiczny	500	900

- Wolne środki lokowane są w obligacje wolne od ryzyka,
 - stopa wolna od ryzyka wynosi 3% w ciągu roku,
 - składka wpłacana jest w momencie $t=0$,
 - koszty ponoszone są w momencie $t=0$,
 - wszystkie świadczenia wypłacane są w momencie $t=1$,
 - kapitał ekonomiczny uwalniany jest w momencie $t=1$,
 - koszt kapitału wynosi 6% w ciągu roku,
 - pomijamy dyskontowanie i podatki.
- a) Podaj definicje EVA/zysku ekonomicznego i współczynnika RORAC, oraz uzasadnij wykorzystanie tych miar w decyzjach biznesowych (1p).
- b) Wyznacz EVA/zysk ekonomiczny dla linii A i B, oraz wskaż preferowaną linię (2p).
- c) Wyznacz współczynniki RORAC dla linii A i B, oraz wskaż preferowaną linię (2p).

$$a) \text{ EVA / zysk ekonomiczny} = \text{zysk operacyjny} - \text{koszt kapitału} \cdot \text{kapitał zaangażowany}$$

$$\text{RORAC} = \frac{\text{zysk operacyjny}}{\text{kapitał ekonomiczny}}$$

Tradycyjne miary księgowe nie uwzględniają ryzyka związanego z prowadzeniem danej linii. Dwie linie o takim samym zysku mogą wymagać zupełnie innych poziomów kapitału bezpieczeństwa. RORAC i EVA koryguje wyniki o ten czynnik.

$$b) \text{ EVA}_A = (10000 - 10000 \cdot 0,1) \cdot 1,03 - 10000 \cdot 0,8 - 0,06 \cdot 500 = \\ = 1240 - 30 = 1240$$

$$\text{EVA}_B = (8000 - 8000 \cdot 0,05) \cdot 1,03 - 8000 \cdot 0,65 - 0,06 \cdot 900 = \\ = 2628 - 55 = 2574$$

Wypieramy linię B.

$$c) \text{ RORAC}_A = \frac{1270}{500} = 2,54$$

$$\text{RORAC}_B = \frac{2628}{900} = 2,92$$

Wybieramy linię B.

W punkcie b i c można dodatkowo uwzględnić zysk z inwestycji kapitału ekonomicznego, wtedy zysk linii A to:

$$\begin{aligned} \text{zysk}_A &= (10000 - 10000 \cdot 0,1) \cdot 1,03 - 10000 \cdot 0,2 + 500 \cdot 0,03 = \\ &= 1285 \end{aligned}$$

Zadanie 2.

Rozważamy model wewnętrzny w reżimie Wyplacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego (poprzedniego) roku szkodowego. Stosujemy model Hertiga rozwoju szkód, w którym skumulowane wypłaty $(C_i, i = 0, \dots, n)$, w przyszłych latach kalendarzowych i , opisane są wzorem: $C_0 = 50, C_i = C_{i-1} \cdot e^{X_i}$, gdzie $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i
1 (najbliższy rok kalendarzowy)	0.5	0.25
2	0.4	0.15
3	0.1	0.05

Wartość C_0 opisuje wartość świadczeń już wypłaconych przez ubezpieczyciela w poprzednich latach kalendarzowych. Podane oszacowania (μ_i, σ_i) są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie uwzględniamy błędów estymacji tychże parametrów w ocenie ryzyka rezerw. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0% - nie uwzględniamy więc dyskontowania w poniższych obliczeniach.

- Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w reżimie Wyplacalność II stosując odpowiednią definicję straty i miarę Value-at-Risk. Wyjaśnij komponenty funkcji straty (3p).
- Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wyplacalność II, w szczególności wartość najlepszego oszacowania i margines ryzyka. Margines ryzyka wyznacz stosując aproksymację opartą na bieżącej wartości wymogu kapitałowego dla ryzyka rezerw i prognozie BEL w kolejnych latach kalendarzowych. Przyjmij koszt kapitału 6% (2p).

Wskazówka: Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak + \frac{1}{2}b^2k^2}$.

a) Stratę w honorarium jednorocznym definiujemy jako

$$L_{NR} = E[C_n | C_1] - E[C_n | C_0]$$

Powyższe wartości oczekiwane opisują najlepsze oszacowanie zobowiązania z tytułu szkód niewypłaconych pod warunkiem informacji w danym momencie czasu.

$$C_3 = C_2 e^{X_3} = C_1 e^{X_2} e^{X_3} = C_0 e^{X_1} e^{X_2} e^{X_3} = C_0 e^{X_1 + X_2 + X_3}$$

$$\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ gdzie } Z \sim N(0,1)$$

$$Y = e^X \text{ gdzie } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ wtedy } E[Y] = \exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\}$$

$$E[C_3 | C_0] = E[C_0 e^{X_1 + X_2 + X_3} | C_0] = C_0 E[e^{X_1 + X_2 + X_3}]$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0.5 + 0.4 + 0.1; 0.25^2 + 0.15^2 + 0.05^2) =$$

$$= N(1; 0, 0875)$$

$$E[C_3 | C_0] = 50 \cdot \exp\left\{1 + \frac{1}{2} \cdot 0,0875\right\} = 50 \cdot 2,2398$$

$$\begin{aligned} E[C_3 | C_1] &= E[C_1 e^{X_2 + X_3} | C_1] = C_1 E[e^{X_2 + X_3}] = \\ &= C_0 e^{X_1} \cdot \exp\left\{0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,025\right\} = \\ &= 50 e^{X_1} \cdot 1,6695 \end{aligned}$$

$$L_{112} = 50(e^{X_1} \cdot 1,6695 - 2,2398)$$

$$\text{Var}_{0.995}(L_{112}) = \text{Var}_{0.995}[50(e^{X_1} \cdot 1,6695 - 2,2398)] =$$

$$= 50[1,6695 \cdot \text{Var}_{0.995}(e^{X_1}) - 2,2398] =$$

$$= 50[1,6695 \cdot \exp\left\{0,5 + 0,15 \Phi^{-1}(0,995)\right\} - 2,2398] =$$

$$= 119,67$$

b) Zobowiązania = BEL + RM

Należy wyznaczyć BEL w kolejnych latach w celu wyznaczenia RM.

Szkody zni wypłacone wynoszą $C_0 = 50$. Wartość najlepszego oszacowania prostych do wypłaty świadczeń na moment startowy wynosi:

$$\text{BEL}_0 = E[C_3 - C_0 | C_0] = E[C_3 | C_0] - C_0 = 141,99 - 50 = 91,99$$

$$E[C_1 | C_0] = E[C_0 e^{X_1}] = 50 \exp\left\{0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,0625\right\} = 25,05$$

$$\begin{aligned} \text{BEL}_1 &= E[C_3 - C_1 | C_0] = E[C_3 | C_0] - E[C_1 | C_0] = \\ &= 141,99 - 25,05 = 56,94 \end{aligned}$$

$$E[C_2 | C_0] = E[C_0 e^{X_1 + X_2} | C_0] = 50 \exp\left\{0,9 + \frac{1}{2} \cdot 0,085\right\} = 122,32$$

$$BEL_1 = E[C_3 - C_2 | C_0] = E[C_3 | C_0] - E[C_2 | C_0] =$$

$$= 141,99 - 128,32 = 13,67$$

$$SCR_0 = 119,67$$

$$SCR_1 = 119,67 \cdot \frac{56,94}{91,99} = 74,06$$

$$SCR_2 = 119,67 \cdot \frac{13,67}{91,99} = 17,78$$

$$RM = C_0 C \cdot \sum_{i=0}^2 SCR_i \quad (\text{brak dyskontowania})$$

$$RM = 0,06 (119,67 + 74,06 + 17,78) = 12,69$$

$$\text{zobowiązania} = 91,99 + 12,69 = 104,68$$

Zadanie 3.

Rozważamy ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej w komunikacyjnym ubezpieczeniu flotowym oraz pojazdów służbowych z limitem odpowiedzialności. Wysokość pojedynczej szkody modelowana jest rozkładem Pareto (Lomax):

$$1 - F_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\alpha, \quad x > 0,$$

z parametrami $\alpha = 5$, $\lambda = 1000$. Składka bazowa w ubezpieczeniu z limitem bazowym $L_0 = 500$ per zdarzenie wynosi 300. Rozważamy współczynniki *Increased Limits Factors* w celu wyceny ubezpieczeń z wyższym limitem.

- Wyznacz współczynniki ILF, oraz ich wartości dla limitu $L = 1000$ i $L = 2000$ (3p).
- Podaj definicję współczynnika *Rate-on-Line* stosowanego do wyceny kontraktów reasekuracji nieproporcjonalnej (1p).
- Wyznacz *Rate-on-Line* dla kontraktu 1000 xs 1000 stosując składkę bazową i wyznaczone ILF powyżej (1p).

Wskazówka:

Współczynniki *Increased Limits Factors* definiowane są zgodnie ze wzorem:

$$ILF_{L_0}(L) = \frac{E[\min(X; L)]}{E[\min(X; L_0)]}.$$

Dodatkowo, zachodzi $E[\min(X; x)] = \int_0^x (1 - F_X(u)) du$.

a) Konstruując ze wskazówki:

$$\begin{aligned} E[\min(X, x)] &= \int_0^x (1 - F_X(u)) du = \int_0^x \lambda^\alpha (\lambda + u)^{-\alpha} du = \\ &= \lambda^\alpha \left. \frac{(\lambda + u)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_0^x = \lambda^\alpha \left[\frac{(\lambda + x)^{1-\alpha} - \lambda^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] = \\ &= \lambda^\alpha \left[\frac{\lambda^{1-\alpha} - (\lambda + x)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \right] \\ ILF_{L_0}(L) &= \frac{E[\min(X, L)]}{E[\min(X, L_0)]} = \frac{\lambda^\alpha \left[\frac{\lambda^{1-\alpha} - (\lambda + L)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \right]}{\lambda^\alpha \left[\frac{\lambda^{1-\alpha} - (\lambda + L_0)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \right]} = \\ &= \frac{\lambda^{1-\alpha} - (\lambda + L)^{1-\alpha}}{\lambda^{1-\alpha} - (\lambda + L_0)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

$$ILF_{500}(1000) = \frac{1000^{1.5} - (1000 + 1000)^{1.5}}{1000^{1.5} - (1000 + 500)^{1.5}} = 1,1683$$

$$ILF_{500}(2000) = 1,2307$$

b) $ROL = \frac{\text{strada rekursyjna}}{\text{limit odpowiedzialności rekursora}}$

c) Wyceniamy pojedynczą stratę rekursowaną zgodnie z kontraktem L x U stosując formułę:

$$ES = E[\min(X, U+L)] - E[\min(X, U)] = \\ = E[\min(X, L_0)] \cdot [ILF_{L_0}(U+L) - ILF_{L_0}(U)]$$

W klasycznym modelu kolektynym, strada rekursyjna za kontrakt L x U wynosi:

$$EN \cdot ES = EN \cdot E[\min(X, L_0)] \cdot [ILF_{L_0}(U+L) - ILF_{L_0}(U)],$$

gdzie N oznacza liczbę zdarzeń; $EN \cdot E[\min(X, L_0)]$ oznacza techniczną stratę barową w ubezpieczeniu z limitem barowym.

W konsekwencji, strada rekursyjna za kontrakt 1000 x 1000 wynosi:

$$300[1,2307 - 1,1683] = 18,75$$

$$ROL = \frac{18,75}{1000} = 1,875\%$$

Zadanie 4.

Zgodnie z modelem Sharpe'a zachodzi relacja

$$R_a = \alpha_a + r_f + \beta_a * (R_m - r_f) + \varepsilon_a,$$

gdzie

- R_a jest zmienną losową opisującą stopę zwrotu z akcji a ,
- R_m – zmienna losowa opisującą stopę zwrotu z portfela rynkowego i jednocześnie zmienna losowa opisującą rynkowe ryzyko systematyczne,
- r_f – stopa wolna od ryzyka,
- ε_a – niezależna zmienna losowa opisującą ryzyko niesystematyczne dla akcji,
- β_a – współczynnik beta dla akcji opisujący wrażliwość stopy zwrotu akcji na zmiany stopy zwrotu całego rynku,
- α_a – współczynnik alpha dla akcji opisujący systematyczne źródła premii za ryzyko dla akcji poza systematycznym ryzykiem rynkowym.

Parametry zostały oszacowane w oparciu o dane historyczne. Posiadamy następujące informacje nt. spółek notowanych na giełdzie:

Spółka	Wartość rynkowa	Współczynnik beta	Prognozowana premia za ryzyko
A	?	0.9	4.5%
B	?	1.3	3.5%

Prognozowana premia za ryzyko dla portfela rynkowego wynosi 3%. Bieżąca stopa wolna od ryzyka wynosi 2%.

- Wyznacz premie za ryzyko dla akcji spółek stosując klasyczny model CAPM (2p).
- Wyznacz oszacowane współczynniki α_a dla akcji spółek korzystając z podanej prognozowanej premii za ryzyko dla akcji (2p).
- W oparciu o oszacowane wartości α_a zaproponuj i wyjaśnij, w oparciu o teorię rynków finansowych, która ze spółek mogła być przewartościowana historycznie (1p).

a) Klasyczny model CAPM jest postaci:

$$R_a = r_f + \beta_a (R_m - r_f) + \varepsilon_a$$

$$R_a - r_f = \beta_a (R_m - r_f) + \varepsilon_a$$

$$E R_a - r_f = \beta_a (E R_m - r_f) \quad \text{bo } E \varepsilon_a = 0$$

$R = E R_a - r_f$ – premia za ryzyko dla akcji spółek

$E R_m - r_f$ – premia za ryzyko dla portfela rynkowego

$$R_A = 0,9 \cdot 0,03 = 0,027$$

$$R_B = 1,3 \cdot 0,03 = 0,039$$

$$b) R = \alpha_a + \beta_a (ER_m - r_f)$$

$$\alpha_a = R - \beta_a (ER_m - r_f)$$

$$\alpha_A = 0,045 - 0,027 = 0,018$$

$$\alpha_B = 0,035 - 0,039 = -0,004$$

c) Współczynniki α służą do oceny stopnia dopasowania ceny aktywa do stanu równowagi rynkowej.

Ponieważ $\alpha_B < 0$, jedna z przyczyn może być przecenienie spółki B. Inwestorzy podejmują wysoki ryzyko systematyczne, otrzymując w zamian zbyt niskie oczekiwane zwroty. Aby stopa zwrotu była zbyt niska przy danych przyszytych przepływach pieniężnych, bieżąca cena rynkowa akcji musi być zbyt wysoka.

Zadanie 5.

Rozpatrujemy uproszczony bilans ekonomiczny w reżimie Wypłacalność II. Posiadamy następujące informacje:

Pozycja	Wartość w bilansie	Niezdwersyfikowany wymóg kapitałowy
Obligacje (aktywa)	2000	500
Akcje (aktywa)	500	300
Rezerwy techniczno- ubezpieczeniowe (zobowiązania)	1800 (w tym wartość najlepszego oszacowania 1700 i margines ryzyka 100)	700

Pomijamy dyskontowanie. Zadana jest macierz współczynników korelacji strat jednorocznych związanych ze zmianą wartości obligacji, akcji i rezerw:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Zapisz funkcję łącznej straty w horyzoncie jednorocznym (1p).
- Wyznacz zdwersyfikowany kapitał wykorzystując metodę wariancji-kowariancji (2p).
- Oceń, czy firma jest wypłacalna w ramach reżimu Wypłacalność II (1p).
- Wyjaśnij, bez przeprowadzania obliczeń, jak zmieni się kondycja finansowa (współczynnik wypłacalności) firmy jeżeli współczynnik korelacji pomiędzy stratami związanych ze zmianą wartości obligacji i rezerw zwiększy się (1p).

a) W reżimie Wypłacalności II łączna strata w horyzoncie jednorocznym (L) jest definiowana jako spadek wartości środków własnych w ciągu roku. Środki własne to różnica między aktywami a zobowiązaniami.

Definicja łącznej straty:

$$\begin{aligned} \text{Strata} &= -(Wartość \text{ środków własnych w momencie } t+h \\ &\quad - \text{wartość środków własnych w momencie } t). \\ &= -(Wartość \text{ aktywów w momencie } t+h \\ &\quad - \text{wartość aktywów w momencie } t) \\ &\quad + (Wartość \text{ zobowiązań w momencie } t+h \\ &\quad - \text{wartość zobowiązań w momencie } t). \end{aligned}$$

W naszym przypadku:

$$L = L_{\text{obligacje}} + L_{\text{akcje}} + L_{\text{rezerwy}},$$

gdzie strata z aktywów zdefiniowana jest jako

$$L_{aktywa} = - (\text{Wartość aktywów w momencie } t + h \\ - \text{wartość aktywów w momencie } t),$$

oraz strata z zobowiązań zdefiniowana jest jako

$$L_{zobowiązania} = (\text{Wartość zobowiązań w momencie } t + h \\ - \text{wartość zobowiązań w momencie } t).$$

$$b) \text{ } SCR = \sqrt{x^T \Sigma x}$$

$$x^T = [500 \quad 300 \quad 700]$$

$$SCR^2 = [500 \quad 300 \quad 700] \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 700 \end{bmatrix} =$$

$$= [225 \quad 550 \quad 225] \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 700 \end{bmatrix} = 1155000$$

$$SCR = 1074,7092$$

c) Bieżąca wartość nadwyżki aktywów nad zobowiązaniami wynosi $2,500 - 1,800 = 700$ i nie jest wystarczająca do pokrycia wymogu kapitałowego.

d) Kondycja finansowa firmy pogorszy się ponieważ zmiany wartości obligacji i rezerw są dodatnio skorelowane.

Zadanie 6.

Firma ubezpieczeniowa stosuje model wewnętrzny na potrzeby wyznaczenia kapitału ekonomicznego. Rozważamy następujące scenariusze straty łącznej, straty w linii A i straty w linii B, posortowane od największej wartości straty łącznej:

Scenariusz	Strata łączna	Strata A	Strata B
100	380	300	80
99	250	180	70
98	210	150	60
97	195	160	35
96	180	130	50
95	165	125	40
94	155	140	15
93	145	90	55
92	110	65	45
91	90	60	30

- Wyznacz kapitał ekonomiczny na pokrycie straty łącznej stosując miarę Value-at-Risk na poziomie 95% (1p).
- Oceń, czy rozpoznany został efekt dywersyfikacji stosując miarę VaR (2p).
- Wyznacz alokację kapitału ekonomicznego z p. a) do linii A stosując metodę proporcjonalną, tzn. alokując zdywersyfikowany kapitał proporcjonalnie do niezdywersyfikowanych kapitałów w linii A i B (1p).
- Wyznacz alokację kapitału ekonomicznego z p. a) stosując alokację Eulera. Podaj wzór na alokację i wykonaj obliczenia (1p).

Wskazówka: Należy zastosować podstawowe estymatory empiryczne miar populacyjnych.

Odpowiedzi:

- Wybieramy 95-ty scenariusz straty łącznej jako zdywersyfikowany wymóg kapitałowy – 165.
- Wybieramy 95-ty scenariusz straty A jako niezdywersyfikowany wymóg kapitałowy dla linii A – 140, oraz wybieramy 95-ty scenariusz straty B jako niezdywersyfikowany wymóg kapitałowy dla linii B – 45. Efekt dywersyfikacji został rozpoznany ponieważ $165 < 45 + 140$.

c) W metodzie proporcjonalnej zdywersyfikowany kapitał Techniczny (EC) alokuje się do linii proporcjonalnie do udziału jej niezdywersyfikowanego kapitału w sumie niezdywersyfikowanych kapitałów obu linii:

$$EC_A = EC \cdot \frac{VaR_{0,95}(A)}{VaR_{0,95}(A) + VaR_{0,95}(B)}$$

$$EC_A = 165 \cdot \frac{140}{140 + 45} = 124,8648$$

$$d) RC(L_i | L) = E[L_i | L = \text{Var}_p(L)]$$

Łączny $\text{Var}_{0,95}(L) = 165$ co odpowiada scenariuszowi 95.

W scenariuszu 95 strata w linii A wynosi 125, a w linii B wynosi 40.

$$RC(L_A | L) = 125$$

$$RC(L_B | L) = 40$$

Zadanie 7.

Rozważmy 10-letnie ubezpieczenie z funduszem inwestycyjnym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania ubezpieczenia. Pomijamy w tym zadaniu świadczenie w wyniku zgonu i zakładamy, że prawdopodobieństwo dożycia wynosi 1. Składka w wysokości 100 wpłacana jest na fundusz w momencie $t=0$, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 5\%$, $b = 15\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Na końcu każdego roku, z rachunku pobierana jest przez ubezpieczyciela opłata w wysokości 3% wartości rachunku. W momencie końca trwania umowy ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub wpłaconą składkę. Zobowiązanie ubezpieczyciela jest równe świadczeniom płatnym na koniec trwania umowy. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% w okresie rocznym. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka i fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

- Opisz gwarancję i ryzyko finansowe, na które narażony jest ubezpieczyciel wystawiający powyższą gwarancję (1p).
- Wyznacz wartość zobowiązania w reżimie Wypłacalność II. Wykorzystaj najbliższe wartości z tablic rozkładu normalnego (3p).
- Wyjaśnij, czy przy wskazanych parametrach ubezpieczenia, ubezpieczyciel będzie mógł doskonale zabezpieczyć (replikować) powyższe zobowiązanie inwestując w instrumenty dostępne na rynku finansowym, bez ponoszenia zysków i strat. Jeżeli nie, jak należałoby zmienić parametry ubezpieczenia, aby ubezpieczyciel mógł doskonale zabezpieczyć zobowiązanie (1p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$\text{Cena opcji put} = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

- Ryzyko finansowe związane jest ze spadkiem wartości rachunku ubezpieczeniowego poniżej gwarantowanej minimalnej stopy zwrotu ze środków zainwestowanych na rynku finansowym.

b) Załóżmy, że $S_0 = 1$. Wtedy S_T opisuje stopę zwrotu z funduszu w całym okresie trwania umowy. Wartość rachunku F w momencie T dana jest wzorem:

$$F_T = F_0 \cdot S_T (1-p)^T$$

$F_0 = \text{Składka}$,

gdzie p oznacza opłatę pobieraną z rachunku. Zobowiązanie ma postać:

$$\begin{aligned}
H &= \max \{ \bar{F}_T, F_0 \} = F_T + \max \{ F_0 - F_T, 0 \} = \\
&= F_T + \max \{ F_0 - F_0 S_T (1-p)^T, 0 \} = \\
&= F_T + F_0 \max \{ 1 - S_T (1-p)^T, 0 \} = \\
&= F_T + F_0 (1-p)^T \underbrace{\max \{ (1-p)^{-T} - S_T, 0 \}}_{\text{wypłata z opcji put}}
\end{aligned}$$

Wykorzystując wzór Blacka - Scholesa, wartość 1 jednostki opcji put przy parametrach:

$$r = \ln(1,02) \quad \tau = 0,15 \quad T = 10 \quad k = (1 - 0,03)^{-10} \quad S_0 = 1$$

$$d_1 = \frac{1}{0,15 \sqrt{10}} \left[\ln(0,97^{10}) + \left(\ln(1,02) + \frac{0,15^2}{2} \right) \cdot 10 \right] = 0,0125$$

$$d_2 = 0,0125 - 0,15 \sqrt{10} = -0,4612$$

$$N(-d_1) = 0,4950 \quad N(-d_2) = 0,6779$$

jest równa:

$$p = -0,4950 \cdot 1 + 0,6779 \cdot 0,97^{-10} \cdot \exp\{-\ln(1,02) \cdot 10\} = 0,2591$$

Wartość zobowiązania wynosi:

$$H = 100 \cdot 0,97^{10} + 100 \cdot 0,97^{10} \cdot 0,2591 = 92,4505$$

- c) Ponieważ wartość zobowiązania jest niższa niż wpłacona składka, gwarancję można replikować inwestując na rynku finansowym i stosując strategię delta-hedging.

Zadanie 8.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązania w wysokości 200 i 500 z terminami zapadalności 2 i 4 lata. W celu zabezpieczenia zobowiązania rozważa zakup 1, 3 i 5-letniej obligacji zerokuponowych o wartościach wykupu 100. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 4%.

- Wyprowadź i zinterpretuj miary duration i convexity dla obligacji zerokuponowej z terminem wykupu T i jednostkową wartością wykupu (2p).
- Firma konstruuje portfel zabezpieczający dopasowując wartości aktywów i zobowiązań, miary duration i convexity dla aktywów i zobowiązań. Zapisz odpowiednie równania pozwalające wyznaczyć liczby obligacji, które powinny być zakupione, nie musisz rozwiązywać układu równań (2p).
- Wyjaśnij, czy powyższa strategia jest strategią zabezpieczającą zmianę wartości zobowiązania ze względu na każdą zmianę stóp procentowych (1p).

a) Cena obligacji kuponowej :

$$PV(i) = \sum_{t=1}^n \frac{CF(t)}{(1+i)^t}$$

Miara duration dla obligacji kuponowej :

$$\frac{dPV(i)}{di} = \sum_{t=1}^n -t(1+i)^{-t-1} \cdot CF(t) = -\frac{1}{1+i} \sum_{t=1}^n \frac{t \cdot CF(t)}{(1+i)^t}$$

Miara convexity dla obligacji kuponowej :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 PV(i)}{di^2} &= \sum_{t=1}^n t(t+1)(1+i)^{-t-2} \cdot CF(t) = \\ &= \frac{1}{(1+i)^2} \sum_{t=1}^n \frac{t(t+1) \cdot CF(t)}{(1+i)^t} \end{aligned}$$

b) Niech a oznacza liczbę rocznych obligacji, b - liczbę 3-letnich obligacji, c - liczbę 5-letnich obligacji. Zapisujemy układ równań, gdzie poszczególne równania odzwierciedlają ceny, miary duration i convexity dla obligacji i zobowiązania :

$$\frac{200}{1,04^2} + \frac{500}{1,04^4} = a \cdot \frac{100}{1,04} + b \cdot \frac{100}{1,04^3} + c \cdot \frac{100}{1,04^5}$$

$$2 \cdot \frac{100}{1,04^3} + 4 \cdot \frac{500}{1,04^5} = a \cdot \frac{100}{1,04^2} + b \cdot 3 \cdot \frac{100}{1,04^4} + c \cdot 5 \cdot \frac{100}{1,04^6}$$

$$6 \cdot \frac{200}{1,04^4} + 20 \cdot \frac{500}{1,04^6} = a \cdot 2 \cdot \frac{100}{1,04^3} + b \cdot 12 \cdot \frac{100}{1,04^5} + c \cdot 30 \cdot \frac{100}{1,04^7}$$

- c) Powyższe miary duration i convexity zakładają równoległe zmiany struktury terminowej stóp procentowych. Powyższa strategia jest strategią zabezpieczającą przy (infinitesimalnie) małych równoległych zmianach struktury terminowej stóp procentowych.

Zadanie 9.

- a) Wyjaśnij pojęcia ryzyka śmiertelności i długowieczności (1p).
- b) Scharakteryzuj cztery rodzaje ryzyka śmiertelności i długowieczności związane z poziomem (*level*), zmiennością (*volatility*), trendem (*trend*) i zdarzeniami katastroficznymi (*catastrophe*), w szczególności wskaż kluczowe różnice pomiędzy czynnikami ryzyka *level* vs *volatility*, *volatility* vs *catastrophe* i *level* vs *trend* (4p).

a) Pojęcia ryzyka śmiertelności i długowieczności

- Ryzyko śmiertelności (*mortality risk*): Jest to ryzyko polegające na tym, że rzeczywista umieralność w ubezpieczonym portfelu okaże się wyższa (cięższa) niż oczekiwano. Stanowi ono kluczowe zagrożenie dla ubezpieczeń na życie (np. ubezpieczeń terminowych lub na całe życie), w których ubezpieczyciel jest zobowiązany do przedterminowej wypłaty świadczeń w przypadku zgonu ubezpieczonego.
- Ryzyko długowieczności (*longevity risk*): Jest to ryzyko polegające na tym, że rzeczywista umieralność okaże się niższa (lżejsza) niż oczekiwano, co oznacza, że ludzie będą żyli dłużej, niż zakładano. Ryzyko to bezpośrednio zagraża funduszom emerytalnym oraz ubezpieczycielom oferującym renty życiowe, ponieważ zmusza ich do wypłacania świadczeń przez dłuższy okres, generując dodatkowe koszty i zwiększając rezerwy.

b) Charakterystyka czterech rodzajów ryzyka oraz kluczowe różnice.

1. Ryzyko poziomu (*level risk*): Ryzyko, że rzeczywista, bazowa umieralność w danej populacji różni się od poziomu przyjętego w kalkulacjach aktuarialnych.
2. Ryzyko zmienności (*volatility risk*): Ryzyko wynikające z przypadkowych wahań liczby zgonów wokół średniej, co jest bezpośrednim efektem ograniczonej (skończonej) liczby osób w ubezpieczonym portfelu.
3. Ryzyko katastrofy (*catastrophe risk*): Skrajna postać ryzyka zmienności, oznaczająca gwałtowny, drastyczny i tymczasowy wzrost umieralności wywołany nadzwyczajnymi zdarzeniami zewnętrznymi (np. wojny, pandemie, kataklizmy).
4. Ryzyko trendu (*trend risk*): Ryzyko, że tempo długoterminowej poprawy (lub pogorszenia) umieralności na przestrzeni lat będzie przebiegać inaczej, niż założono w prognozach.

Kluczowe różnice pomiędzy czynnikami ryzyka:

- Poziom (level) vs Zmienność (volatility):
 - Ryzyko poziomu ma charakter systematyczny i wynika z nieprawidłowego oszacowania rzeczywistej umieralności całej populacji u źródła.
 - Ryzyko zmienności ma charakter czysto statystyczny i losowy. Może ono doprowadzić do strat w mniejszych portfelach nawet wtedy, gdy aktuariusz bezbłędnie oszacował rzeczywisty, bazowy poziom (level) śmiertelności danej populacji.
- Zmienność (volatility) vs Katastrofa (catastrophe):
 - Zmienność opisuje standardowe, drobne fluktuacje wokół oczekiwanej średniej w normalnych warunkach rynkowych.
 - Katastrofa to nagłe, rzadkie i ekstremalne wydarzenie o wielkiej skali, które drastycznie podnosi śmiertelność. Ponadto, ryzyko katastroficzne dotyczy niemal wyłącznie ryzyka śmiertelności (gwałtowne skoki umieralności), ponieważ nagły, masowy i tymczasowy spadek umieralności (który uderzyłby w portfele rentowe) jest w rzeczywistości nieprawdopodobny.
- Poziom (level) vs Trend (trend):
 - Ryzyko poziomu koncentruje się na błędzie oszacowania umieralności w ujęciu statycznym – odnosi się do teraźniejszości i najbliższej, natychmiastowej przyszłości.
 - Ryzyko trendu ma charakter wyłącznie długoterminowy i dynamiczny; dotyczy ono niepewności co do kierunku oraz tempa, w jakim wskaźniki umieralności będą ewoluować i zmieniać się w czasie (np. pod wpływem postępu medycyny) na przestrzeni kolejnych dekad.

Zadanie 10.

W oparciu o Rozporządzenie Delegowane Komisji uzupełniające dyrektywę Wypłacalność II:

- a) Wymień dwie linie biznesowe w ramach zobowiązań z tytułu umów ubezpieczeń innych niż ubezpieczenia na życie (1p).
- b) Wymień dwie linie biznesowe w ramach zobowiązań z tytułu ubezpieczeń na życie (1p).
- c) Wymień jakie rodzaje zobowiązań, oprócz zobowiązań ubezpieczeń na życie i innych niż ubezpieczenia na życie, uwzględniamy jeszcze w ramach wyodrębniania linii biznesowych (1p).
- d) W oparciu o jakie główne kryterium przypisywane są zobowiązania do linii biznesowych (1p).
- e) W jaki sposób przypisywane są zobowiązania z tytułu ubezpieczeń zdrowotnych do linii biznesowych (1p).

a) Dwie linie biznesowe w ramach ubezpieczeń innych niż na życie (non-life):

- Ubezpieczenia pokrycia kosztów świadczeń medycznych.
- Ubezpieczenia na wypadek utraty dochodów

b) Dwie linie biznesowe w ramach ubezpieczeń na życie (life):

- Ubezpieczenia zdrowotne
- Ubezpieczenia z udziałem w zyskach

c) Zobowiązania z tytułu reasekuracji nieproporcjonalnej

d) Przypisanie zobowiązania ubezpieczeniowego lub reasekuracyjnego do określonej linii biznesowej musi odzwierciedlać charakter ryzyka związanego z tym zobowiązaniem.

e) O przypisaniu decydują zastosowane techniki ubezpieczeniowe (podstawa techniczna).