Zadanie 1.

Wytłumacz na czym polegają poniższe metody zarządzania ryzykiem w ubezpieczeniach majątkowych:

a) Premium rating/prior rating (1p).

b) Experience rating/posterior rating (1p).

c) Dywersyfikacja (1p).

d) Reasekuracja (1p).

e) Sekurytyzacja (1p).

a) Premium rating / prior rating (Taryfikacja *a priori* / na podstawie czynników ryzyka):

Polega na ustalaniu wyjściowej wysokości składki ubezpieczeniowej na podstawie analizy cech i czynników ryzyka charakteryzujących dany podmiot (np. wiek kierowcy, pojemność silnika). Wykorzystuje się do tego modele statystyczne (np. GLM), aby odpowiednio sklasyfikować ryzyko jeszcze przed wystąpieniem jakichkolwiek roszczeń.

b) Experience rating / posterior rating (Taryfikacja *a posteriori* / na podstawie doświadczenia):

Polega na dostosowywaniu wysokości składki ubezpieczeniowej na podstawie rzeczywistej, historycznej szkodowości danego klienta lub konkretnego portfela w przeszłości. Najbardziej widocznym przykładem tej metody jest system zniżek za bezszkodową jazdę (NCD - *no claims discount*) w ubezpieczeniach komunikacyjnych.

c) Dywersyfikacja:

Polega na ograniczaniu ryzyka poprzez unikanie jego nadmiernej koncentracji. W ubezpieczeniach majątkowych osiąga się to poprzez zróżnicowanie portfela pod kątem geograficznym, łączenie klientów o różnych profilach ryzyka, a także sprzedaż polis z różnych, nieskorelowanych ze sobą klas ubezpieczeń.

d) Reasekuracja:

To podstawowa metoda transferu ryzyka. Polega na przekazaniu (odstąpieniu) części ryzyka ubezpieczeniowego innemu podmiotowi (reasekuratorowi). Może przyjmować formę reasekuracji proporcjonalnej (podział udziału w każdej polisie) lub nieproporcjonalnej / nadwyżkowej (*excess-of-loss*), która chroni przed pojedynczymi, ekstremalnie dużymi szkodami.

e) Sekurytyzacja:

Oznacza transfer ryzyka ubezpieczeniowego na rynki kapitałowe. Polega na zamianie ekspozycji na ryzyko w zbywalny instrument finansowy (papier wartościowy). W ubezpieczeniach majątkowych najczęstszym przykładem są obligacje katastroficzne (*catastrophe bonds*), które inwestorzy kupują, a których wypłata kapitału zostaje wstrzymana lub obniżona, jeśli ubezpieczyciel zostanie dotknięty masowymi stratami (np. na skutek powodzi czy huraganu).

Zadanie 2.

W oparciu o Rozporządzenie Delegowane Wypłacalność II wymień i krótko scharakteryzuj pięć obszarów zarządzania ryzykiem (5p).

1. Ocena ryzyka przyjmowanego do ubezpieczenia i tworzenie rezerw.

   Działania mające na celu optymalny dobór ubezpieczanych ryzyk oraz prawidłowe ustalanie wysokości składek. Obszar ten obejmuje również zarządzanie ryzykiem strat wynikających z błędnych lub nieadekwatnych założeń przyjmowanych do wyceny zobowiązań i tworzenia rezerw techniczno-ubezpieczeniowych.

2. Zarządzanie aktywami i zobowiązaniami.

   Bieżąca ocena i zarządzanie ryzykiem wynikającym z niedopasowania aktywów zakładu ubezpieczeń do jego zobowiązań (pasywów). Obejmuje to analizowanie rozbieżności m.in. pod kątem terminów zapadalności, walut, czy też wrażliwości na zmiany stóp procentowych i inflacji.

3. Zarządzanie ryzykiem lokaty (inwestycyjnym).

   Działania ukierunkowane na zarządzanie ryzykiem rynkowym, ryzykiem kredytowym oraz płynnością portfela inwestycyjnego. Obejmuje to m.in. weryfikację, w jaki sposób instrumenty pochodne są wykorzystywane do ograniczania ryzyka ubezpieczeniowego lub do ułatwiania efektywnego zarządzania portfelem zgodnie z tzw. "zasadą ostrożnego inwestora".

4. Zarządzanie ryzykiem płynności.

   Obszar gwarantujący, że zakład ubezpieczeń utrzyma wystarczającą ilość płynnych środków do terminowego regulowania swoich wymagalnych zobowiązań (np. wypłat odszkodowań).

5. Zarządzanie ryzykiem operacyjnym

   Działania nakierowane na identyfikację, ocenę i ograniczanie ryzyka wystąpienia strat wynikających z nieodpowiednich lub zawodnych procesów wewnętrznych, błędów ludzkich, awarii systemów informatycznych, a także ze zdarzeń zewnętrznych (takich jak np. oszustwa, czy gwałtowne zmiany prawne).

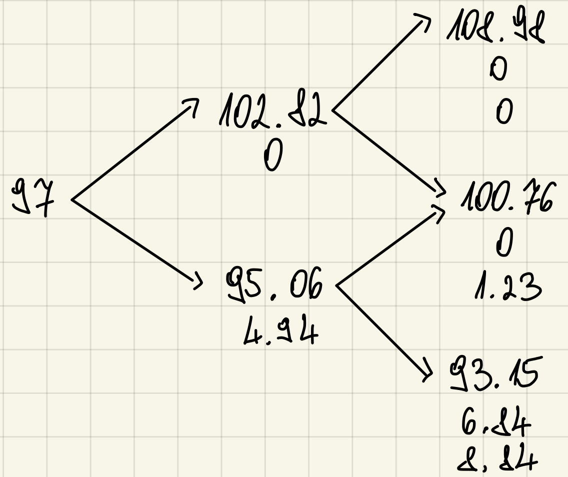
Zadanie 3.

Rozważamy dwuletnie ubezpieczenie z funduszem kapitałowym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnych świadczeń związanych ze śmiercią i z dożyciem końca trwania ubezpieczenia. Wartość rachunku w ubezpieczeniu zależy od stóp zwrotu z funduszu. Ubezpieczony wpłaca składkę w wysokości 100 i ubezpieczyciel inwestuje składkę pomniejszoną o 3% w fundusz w momencie t=0. W celu modelowania stóp w zwrotu z funduszu stosujemy drzewo dwumianowe. Wartość funduszu może wzrosnąć o 6% lub spać o 2% z prawdopodobieństwami historycznymi na poziomie 0.5 i 0.5. Stopa wolna od ryzyka wynosi 4% rocznie w całym okresie. Prawdopodobieństwo zgonu w każdym okresie wynosi 10%. Świadczenie z tytułu zgony jest większą z wartości: wartość rachunku lub gwarantowana wartość równa 100, wypłacaną na koniec roku, w którym nastąpił zgon. Świadczenie z tytułu dożycia jest większą z wartości: wartość rachunku lub gwarantowaną wartość równa 102. Zakładamy, że ryzyko śmiertelności zostało w pełni zdywersyfikowane w dużym portfelu i jest niezależne od ryzyka finansowego. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka oraz fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

a) Wyznacz wartość gwarancji zgodnie z zasadą braku arbitrażu (3p).

b) Wyjaśnij, czy pobrana opłata początkowa w wysokości 3% wpłaconej składki jest wystarczająca do doskonałej replikacji gwarancji (2p).

a) Wyznaczamy wartość rachunku ubezpieczeniowego w momentach $t = 1, 2$ w możliwych scenariuszach zmiany wartości funduszu:



$97 \cdot 1.06 = 102.82$

$97 \cdot 0.98 = 95.06$

zgon:

$\max(100 - 102.82, 0) = 0$

$\max(100 - 95.06, 0) = 4.94$

$\max(100 - 108.98, 0) = 0$

$\max(100 - 100.76, 0) = 0$

$\max(100 - 93.15, 0) = 6.84$

dożycie:

$\max(102 - 108.98, 0) = 0$

$\max(102 - 100.76, 0) = 1.23$

$\max(102 - 93.15, 0) = 8.84$

Wyznaczamy oczekiwane liczby zgonów i dożyć, w konsekwencji oczekiwane liczby świadczeń:

- Oczekiwana liczba świadczeń w wyniku zgonu w momencie $t=1$ wynosi 0.1
- Oczekiwana liczba świadczeń w wyniku zgonu w momencie $t=2$ wynosi $0 \cdot 9 \cdot 0.1 = 0.09$
- Oczekiwana liczba świadczeń w wyniku dożycia w momencie $t=2$ wynosi $0 \cdot 9 \cdot 0.9 = 0.81$

Wyznaczamy prawdopodobieństwo wolne od ryzyka wzrostu wartości funduszy $q = 0.75$, rozwiązując równanie:

$$\frac{1+6\%}{1+4\%} q + \frac{1-2\%}{1+4\%}(1-q) = 1$$

Wykorzystując prawdopodobieństwo wolne od ryzyka, wyznaczamy wartości gwarancji w momentach zapadalności $t = 1, 2$ bez uwzględniania śmiertelności:

- Wartość jednostkowej gwarancji świadczenia w wyniku zgonu zapadającej w momencie $t=1$:

$$\frac{1}{1.04}\left[q P_1^u + (1-q) P_1^d\right] = \frac{1}{1.04}\left[0.75 \cdot 0 + 0.25 \cdot 4.94\right] = 1.19$$

- Wartość jednostkowej gwarancji świadczenia w wyniku zgonu zapadającej w momencie $t=2$:

$$\frac{1}{1.04^2}\left[q^2 P_2^{uu} + 2q(1-q) P_2^{ud} + (1-q)^2 P_2^{dd}\right] = \frac{1}{1.04^2}\left[(1-q)^2 P_2^{dd}\right] =$$

$$= \frac{1}{1.04^2}\left[0.25^2 \cdot 6.84\right] = 0.39$$

- Wartość jednostkowej gwarancji świadczenia w wyniku dożycia zapadającej w momencie $t=2$:

$$\frac{1}{1.04^2}\left[q^2 M_2^{uu} + 2q(1-q)M_2^{ud} + (1-q)^2 M_2^{dd}\right] = \frac{1}{1.04^2}\left[2q(1-q)M_2^{ud} + (1-q)^2 M_2^{dd}\right] =$$

$$= \frac{1}{1.04^2}\left[2\cdot 0.75\cdot 0.25\cdot 1.23 + 0.25^2\cdot 1.84\right] = 0.93$$

Wyznaczamy wartość gwarancji z uwzględnieniem śmiertelności:

$$0.1\cdot 1.18 + 0.09\cdot 0.39 + 0.81\cdot 0.93 = 0.91$$

b) Ponieważ pobrana opłata w wysokości 3 jest wyższa niż wartość gwarancji w wysokości 0.91, opłata jest wystarczająca do replikacji gwarancji przy założeniu, że ryzyko śmiertelności jest w pełni dywersyfikowalne w dużym portfelu i niezależne od ryzyka finansowego.

Zadanie 4.

Rozważamy ryzyko składki i ryzyko rezerw w reżimie Wypłacalność II w segmencie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej z tytułu użytkowania pojazdów mechanicznych (segment 1) oraz w segmencie ubezpieczenia od ognia i innych szkód rzeczowych (segment 4). Miary wielkości ryzyka składki wynoszą, odpowiednio, 40 i 30, odchylenia standardowe ryzyka składki wynoszą 10% i 8%, miary wielkości ryzyka rezerw wynoszą 50 i 70, odchylenia standardowe ryzyka rezerw wynoszą 9% i 10%, współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem składki i ryzykiem rezerw wynosi 0.5, współczynnik korelacji pomiędzy segmentami wynosi 0.25.

a) Stosujemy agregację hierarchiczną zgodnie z Formułą Standardową. Na pierwszym poziomie agregujemy ryzyko składki z ryzykiem rezerw dla każdego segmentu oddzielnie, na kolejnym poziomie agregujemy łączne ryzyko składki i rezerw pomiędzy dwoma segmentami. Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i ryzyka rezerw dla obu segmentów łącznie (zdywersyfikowany kapitał) zgodnie z Formułą Standardową (3p).

b) Zaproponuj inną strukturę zależności dla strat w obu liniach w ramach ryzyka składki i rezerw możliwą do zastosowania w modelu wewnętrznym oraz wskaż wadę/zaletę dwóch podejść (2p).

a) Wzór dla segmentu:

$$SCR_p = 3 \cdot \sqrt{(E_{p,1} \cdot \sigma_{p,1})^2 + (E_{p,r} \cdot \sigma_{p,r})^2 + 2 \cdot E_{p,1} \cdot \sigma_{p,1} \cdot E_{p,r} \cdot \sigma_{p,r} \cdot \rho_{1,r}}$$

Wzór na łączny wymóg:

$$SCR_{total} = \sqrt{SCR_1^2 + SCR_2^2 + 2 \cdot SCR_1 \cdot SCR_2 \cdot \rho_{p_1,p_2}}$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu I:

$$SCR_1 = 3 \cdot \sqrt{(40 \cdot 0.1)^2 + (50 \cdot 0.09)^2 + 2 \cdot 40 \cdot 0.1 \cdot 50 \cdot 0.09 \cdot 0.5} = 22.10$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu II:

$$SCR_2 = 3 \cdot \sqrt{(30 \cdot 0.08)^2 + (70 \cdot 0.1)^2 + 2 \cdot 30 \cdot 0.08 \cdot 70 \cdot 0.1 \cdot 0.5} = 25.37$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu I i II:

$$SCR = \sqrt{(22.10)^2 + (25.37)^2 + 2 \cdot 22.10 \cdot 25.37 \cdot 0.25} = 37.58$$

b) Możemy przeprowadzić bezpośrednią agregację czterech czynników ryzyka w jednym kroku: ryzyko składki w segmencie 1, ryzyko rezerw w segmencie 1, ryzyko składki w segmencie 4, ryzyko rezerw w segmencie 4, wykorzystując macierz korelacji o wymiarach 4x4. Wada: większa liczba współczynników korelacji do estymacji. Zaleta: pełny opis struktury zależności.

Zadanie 5.

Aktuariusz monitoruje jakość swoich prognoz Value-at-Risk w ramach modelu kapitału ekonomicznego dla ryzyka finansowego. W oparciu o dzienne dane historyczne, przeprowadził back-testing prognoz. Dla kolejnych momentów czasu, poczynając od 1 stycznia 2025, z krokiem dziennym, oszacował 100 wartości Value-at-Risk straty jednodniowej na poziomie ufności 0.95 i porównał swoje prognozy z rzeczywistymi zaobserwowanymi stratami. Aktuariusz odnotował przekroczenia prognozy Value-at-Risk w kolejnych dniach o numerach 3, 8, 17, 29, 67, 90, 91, 92.

a) Załóżmy, że liczba przekroczeń prognozy Value-at-Risk tworzy ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Bernoulliego. W oparciu o jednostronny prawostronny test dwumianowy (wartość p w teście) oceń jakoś prognoz. Wykorzystaj aproksymację rozkładem normalnym do wyznaczenia prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym (3p).

b) Aktuariusz potwierdził, że straty jednodniowe w kolejnych okresach są niezależne oraz pochodzą w rozkładu normalnego z odchyleniem równym $\sigma = 0.1$. Przy powyższych założeniach, wyznacz miarę Value-at-Risk na poziomie ufności 0.95 w horyzoncie rocznym zakładając 250 dni w ciągu roku. Uzasadnij obliczenia (2p).

Odpowiedzi:

a) Liczba przekroczeń T pod warunkiem hipotezy zerowej mówiącej o poprawności otrzymanych prognoz posiada rozkład dwumianowy z parametrami $Bin(100,0.05)$ o wartości oczekiwanej $100 \cdot 0.05$ i wariancji $100 \cdot 0.05 \cdot 0.95$. Wyznaczamy

$$p - value = \Pr(T > 8|H_0) = \Pr\left(Z > \frac{8-5}{\sqrt{4.75}} \middle| H_0 \right) = 0.085.$$

Wybieramy poziom istotności 0.05. Ponieważ p-value jest większe niż wybrany poziom istotności, na ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o poprawności prognoz na poziomie istotności 0.05.

b) Strata w horyzoncie ostatecznym ma postać $L = L_1 + \cdots + L_{250}$, gdzie L_i oznaczają straty jednodniowe. W oparciu o założenia możemy wyznaczyć rozkład $L \sim N(0, 250 \cdot 0.1^2)$. W konsekwencji, miara ryzyka:

$$VaR_{0.95}(L) = \sqrt{250} \cdot 0.1 \cdot \Phi^{-1}(0.95) = 2.6.$$

$$VaR_{\alpha} = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$\mu = 0$$

$$\sigma = \sqrt{250} \cdot 0.1$$

Zadanie 6.

Rozważamy ryzyko rezerw w segmencie 2 w ramach reżimu Wypłacalność II. Posiadamy następujące informacje:

k - rok obrachunkowy	BEL_k - najlepsze oszacowanie rezerwy na koniec roku obrachunkowego na roszczenia zaległe na początku roku obrachunkowego	X_k - płatności dokonane w trakcie roku obrachunkowego z tytułu roszczeń zaległych na początku roku obrachunkowego	BEL_{k-1} - najlepsze oszacowanie rezerwy na początek roku obrachunkowego na roszczenia zaległe na początku roku obrachunkowego
1	200	130	300
2	350	100	500
3	300	275	600
4	230	250	450
5	250	200	420

Aktuariusz potwierdził, że w każdym roku obrachunkowym zmienna $BEL_k + X_k | X_{k-1}, \dots, X_1, BEL_{k-1}, \dots, BEL_1, BEL_0$ ma rozkład normalny o momentach:

$$E[BEL_k + X_k | X_{k-1}, \dots, X_1, BEL_{k-1}, \dots, BEL_1, BEL_0] = \beta BEL_{k-1},$$

$$Var[BEL_k + X_k | X_{k-1}, \dots, X_1, BEL_{k-1}, \dots, BEL_1, BEL_0] = \sigma^2 BEL_{k-1}^2.$$

a) Wyznacz oszacowania parametrów β i σ^2 metodą największej wiarogodności. (3p).

b) Wykorzystując oszacowanie $\hat{\sigma}$ z pkt. a), wyznacz specyficzne dla zakładu odchylenie standardowe ryzyka rezerw w rozważanym segmencie zgodnie ze wzorem (2p):

$$c\hat{\sigma}\sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1-c)\sigma_{SF},$$

gdzie T - liczba lat obrachunkowych, $\sigma_{SF} = 0.08$ (odchylenie standardowe ryzyka rezerw dla rozważanego segmentu zgodnie z Formułą Standardową), c - współczynnik wiarygodności:

Długość okresu w latach	Współczynnik wiarygodności c
5	34%
6	51%
7	67%
8	81%
9	92%
10+	100%

Wskazówka: Zauważ, że zmienne $\frac{BEL_k+X_k}{BEL_{k-1}} | X_{k-1}, \dots, X_1, BEL_{k-1}, \dots, BEL_1, BEL_0$ mają rozkład normalny niezależny od roku obrachunkowego.

a) Wyznaczamy współczynniki $r_k = \frac{BEL_k+X_k}{BEL_{k-1}}$ w kolejnych latach obrachunkowych:

k	r_k
1	1.10
2	0.90
3	0.96
4	1.07
5	1.07

Korzystając ze wskazówki, otrzymujemy:

$$E\left[\frac{BEL_k + X_k}{BEL_{k-1}} \middle| X_{k-1}, \dots, X_1, BEL_{k-1}, \dots, BEL_1, BEL_0\right] = \beta,$$
$$Var\left[\frac{BEL_k + X_k}{BEL_{k-1}} \middle| X_{k-1}, \dots, X_1, BEL_{k-1}, \dots, BEL_1, BEL_0\right] = \sigma^2,$$

oraz niezależność zmiennych $\frac{BEL_k+X_k}{BEL_{k-1}}$ w okresach obrachunkowych.

Parametry estymujemy korzystając z klasycznych estymatorów MNW dla rozkładu normalnego:

$$\hat{\beta} = \frac{1.10 + 0.90 + 0.96 + 1.07 + 1.07}{5} = 1.02,$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{5}((1.10 - 1.02)^2 + (0.90 - 1.02)^2 + (0.96 - 1.02)^2 + (1.07 - 1.02)^2 + (1.07 - 1.02)^2) = 0.59.$$

b) Specyficzne dla zakładu odchylenie standardowe wynosi:

$$0.34 \cdot 0.7671 \sqrt{\frac{5+1}{5-1}} + (1-0.34) \cdot 0.08 = 8.47\%.$$

Zadanie 7.

Firma ubezpieczeniowa przygotowuje bilans w reżimie Wypłacalność II na koniec 2025r. Wyznaczyła:

- Wartość aktywów równą 400.
- Wartość najlepszego oszacowania zobowiązań (*best estimate*) równą 200, oraz prognozę najlepszego oszacowania zobowiązań w kolejnych latach kalendarzowych: 100, 50 i 20. Zakładamy, że dysponujemy wartościami *best estimate* zdyskontowanych przepływów na początek roku 2026, 2027, 2028, 2029.
- Kapitałowy wymóg wypłacalności na poziomie 50.

Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% na koniec 2025. Na koniec roku 2026 okazało się, że przepływ pieniężny w roku 2026 był o 10% wyższy niż oczekiwano (zakładamy, że przepływ realizuje się na koniec roku na potrzeby uwzględnienia dyskontowania). Aktuariusz nie zmienił założeń wyceny na konie roku 2026. Struktura terminowa stóp procentowanych nie zmieniła się.

a) Wyznacz margines ryzyka na koniec 2025 zakładając, że wymogi kapitałowe w kolejnych latach kalendarzowych są proporcjonalne do wartości najlepszego oszacowania (2p).

b) Wyznacz wartość środków własnych na koniec 2025 (1p).

c) Wyznacz wielkość środków własnych na koniec 2026, przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka (2p).

a) $$RM = CoC \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{SCR(i)}{(1+r_t)^i}$$

Przyjęte wymogi kapitałowe są proporcjonalne do wartości najlepszego oszacowania (BEL):

$$SCR(t) = SCR(0) \cdot \frac{BEL(t)}{BEL(0)}$$

$$SCR(0) = 50$$

$$SCR(1) = 50 \cdot \frac{100}{200} = 25$$

$$SCR(2) = 50 \cdot \frac{50}{200} = 12.5$$

$$SCR(3) = 50 \cdot \frac{20}{200} = 5$$

$$RM = 0.06 \left(\frac{50}{1.02} + \frac{25}{1.02^2} + \frac{12.5}{1.02^3} + \frac{5}{1.02^4} \right) = 5.36$$

b) $OF = A - BEL - RM$ OF – Own funds (środki własne)

$$OF = 400 - 200 - 5.36 = 194.63$$

c) $$BEL(0) = \frac{E(c_1) + BEL(1)}{1 + r_t}$$ $E(c_1)$ – wartość oczekiwana przepływu na koniec 2026

$$200 = \frac{E(C_1) + 100}{1.02}$$

$$E(C_1) = 104$$

Zmiana środków własnych w 2026 jest wynikiem następujących zmian:

- Strata związana z realizacją przepływu z tytułu ubezpieczenia vs oczekiwany przepływ wynosi $104 \cdot 10\% = 10.4$.
- Stopa zwrotu na środkach własnych wynosi $194.36 \cdot 2\% = 3.89$.
- Uwolnienie marginesu ryzyka wynosi $50 \cdot 6\% = 3$.

Wartość środków własnych na koniec roku 2026 wynosi 194.64-10.4+3.89+6=191.12.

Zadanie 8.

Rozważamy dwie linie biznesowe w ramach modelu kapitału ekonomicznego. Ustalono, że straty jednoroczne w obu liniach pochodzą z łącznego rozkładu normalnego ze współczynnikiem korelacji Pearsona równym 0.25. Wyznaczono również jednoroczne oczekiwane zyski per ekspozycja na poziomie 30 i 50 oraz jednoroczne wymogi kapitałowe per ekspozycja na poziomie 100 i 175 odpowiednio dla obu linii. Wymogi kapitałowe wyznaczono przy pomocy miary Value-at-Risk na poziomie ufności 99.5%. Ekspozycje w obu liniach wynoszą 100 jednostek. Wymogi kapitałowe oraz oczekiwane zyski zależą liniowo od ekspozycji.

a) Wyznacz zdywersyfikowany kapitał dla obu linii stosując miarę Value-at-Risk na poziomie ufności 99.5%. Uzasadnij metodę kalkulacji (2p).

b) Wyznacz alokacje Eulera zdywersyfikowanego kapitału do obu linii (2p).

c) Wyznacz miarę RORAC dla obu linii łącznie (1p).

Wymóg kapitałowy: $RC_1 = 100$

$RC_2 = 175$

Oczekiwany zysk: $\pi_1 = 30$

$\pi_2 = 50$

a) Wyznaczamy zdywersyfikowany kapitał

$$RC(L_1 + L_2) = \sqrt{RC_1^2 + RC_2^2 + 2\rho \cdot RC_1 \cdot RC_2}$$

$$RC(L_1 + L_2) = \sqrt{100^2 + 175^2 + 2 \cdot 100 \cdot 175 \cdot 0.25} = 222.21$$

b) Zgodnie z alokacją Eulera, wyznaczamy alokacje kapitału do linii pierwszej i drugiej:

$$EC(L_i | L) = \frac{RC_i^2 + \rho \cdot RC_1 \cdot RC_2}{RC(L_1 + L_2)}$$

$$E(L_1 | L) = \frac{100^2 + 100 \cdot 175 \cdot 0.25}{222.21} = 64.69$$

$$E(L_2 | L) = \frac{175^2 + 100 \cdot 175 \cdot 0.25}{222.21} = 157.52$$

c) $RORAC = \dfrac{\text{zysk całkowity}}{\text{zdywersyfikowany kapitał}}$

$$RORAC = \frac{30 + 50}{222.21} = 0.36$$

Zadanie 9.

Rozważamy straty generowane przez dwie instytucje finansowe. Rozkłady brzegowe strat są rozkładami Pareto postaci:

$$F_i(x) = 1 - x^{-a_i}, \quad i = 1,2,$$

z parametrami $a_1 = 4, a_2 = 5$. Zależność pomiędzy stratami opisana jest kopułą Gumbela:

$$C(u,v) = \exp\{-((-\ln(u))^b + (-\ln(v))^b)^{1/b}\},$$

z parametrem b. Mierzymy ryzyko systemowe przy pomocy miary *CoVaR* zgodnie z definicją:

$$CoVar_{\alpha,\beta}(X_2, X_1) = F^{-1}_{X_2|X_1 > VaR_\beta(X_1)}(\alpha),$$

gdzie $F^{-1}_{X_2|X_1 > VaR_\beta(X_1)}$ jest odwrotnością dystrybuanty zmiennej $X_2|X_1 > VaR_\beta(X_1)$.

a) Wyznacz dystrybuantę $F_{X_2|X_1 > VaR_\beta(X_1)}(x)$ przy dowolnej wartości parametru b (2p).

b) Wyznacz miarę *CoVaR* przy założeniu doskonale dodatnio zależnych strat (2p).

c) Zinterpretuj miarę *CoVaR* w kontekście ryzyka systemowego, gdy $\beta \mapsto 1^-$ (1p).

Z definicji Value-at-Risk, $VaR_\beta(X_1)$ to taki punkt, dla którego

$$F_1(VaR_\beta(X_1)) = \beta \Rightarrow P(X_1 \leq VaR_\beta(X_1)) = \beta$$

a) $F_{X_2|X_1>VaR_\beta(X_1)}(x) = P(X_2 \leq x \mid X_1 > VaR_\beta(X_1)) =$

$$= \frac{P(X_2 \leq x,\ X_1 > VaR_\beta(X_1))}{P(X_1 > VaR_\beta(X_1))} = \frac{P(X_2 \leq x) - P(X_2 \leq x,\ X_1 \leq VaR_\beta(X_1))}{1-\beta} =$$

$$= \frac{F_2(x) - C(F_2(x), \beta)}{1-\beta}$$

b) W sytuacji doskonale dodatnio zależnych strat, mamy $C(u,v) = \min(u,v)$.

Wyznaczamy kwantyl zmiennej $X_2 | X_1 > VaR_\beta(X_1)$; korzystamy z rozwiązania a):

- Przypadek $F_2(x) \leq \beta$: $F_{X_2|X_1>VaR_\beta(X_1)}(x) = \frac{F_2(x) - F_2(x)}{1-\beta} = 0.$

  Brak rozwiązania, w drugim przypadku widać dlaczego.

- Przypadek $F_2(x) > \beta$: $F_{X_2|X_1>VaR_\beta(X_1)}(x) = \frac{F_2(x) - \beta}{1-\beta}$. Otrzymujemy

  rozwiązanie z równania $F_{X_2|X_1>VaR(X_1)}(x) = \alpha$:

$$\alpha = \frac{F_2(x) - \beta}{1 - \beta}$$

$$F_2(x) = \alpha - \alpha\beta + \beta \qquad F_2(x) = 1 - x^{-\alpha_2}$$

$$1 - x^{-\alpha_2} = \alpha - \alpha\beta + \beta$$

$$x^{-\alpha_2} = 1 + \alpha\beta - \alpha - \beta$$

$$x^{-\alpha_2} = (1-\alpha)(1-\beta)$$

$$x = \left((1-\alpha)(1-\beta)\right)^{-\frac{1}{\alpha_2}}$$

$$CoVaR_{\alpha,\beta}(X_2, X_1) = \left((1-\alpha)(1-\beta)\right)^{-\frac{1}{\alpha_2}}$$

c) Miara $CoVaR$ w kontekście ryzyka systemowego, jako kwantyl zmiennej $X_2|X_1 > VaR_\beta(X_1)$, zwraca wartość maksymalnej straty w jednej z linii, która nie zostanie przekroczona z prawdopodobieństwem α, w sytuacji, gdy w drugiej linii pojawiła się ekstremalnie duża strata, gdy $\beta \mapsto 1^-$.

Zadanie 10.

Firma planuje wdrożyć program reasekuracji nadwyżki szkody 8 mln xs 2 mln, z zachowkiem 2 mln i górnym limitem odpowiedzialności reasekuratora 8 mln. Program reasekuracji stosowany będzie do każdego zdarzenia losowego i posiada nieskończenie wiele wznowień. Do wyceny programu reasekuracji nieproporcjonalnej stosujemy krzywą *exposure curve* postaci:

$$r(x) = \frac{1 - 0.5^x}{1 - 0.5}, \quad x \in [0,1].$$

a) Wyznacz wartości oczekiwane szkód podlegających reasekuracji 8 mln xs 2 mln dla pojedynczych umów w sytuacji, gdy szkoda maksymalna *possible maximum loss* wynosi 1 mln, 5 mln oraz 20 mln. Przyjmij jednostkową wartość oczekiwaną szkód brutto (3p).

b) Program reasekuracji nadwyżki szkody obejmie portfel składający się z umów ze szkodami maksymalnymi ustalonymi w wysokościach 1 mln, 5 mln oraz 20 mln. Udziały umów z powyższymi szkodami maksymalnymi w portfelu, mierzone przypisaną składką brutto, wynoszą odpowiednio 20%, 30% i 50%. Oczekiwane współczynniki szkodowości brutto wynoszą 70%, 65%, 60%, odpowiednio dla powyższych wysokości szkody maksymalnej. Wyznacz wartość oczekiwaną szkód podlegających reasekuracji 8 mln xs 2 mln zastosowanej do rozważanego portfela jako procent całkowitej przypisanej składki cedenta (2p).

Wskazówka:

Krzywa *exposure curve* jest zdefiniowana dla złożonej zmiennej $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$:

$$r(x) = \frac{E[\sum_{i=1}^{N} \min(X_i\,;\, x \cdot M)]}{E[\sum_{i=1}^{N} X_i]} = \frac{E[\min(X\,;\, x \cdot M)]}{E[X]},$$

gdzie M oznacza *possible maximum loss*.

Zachowek $U = 2$ mln

Limit odpowiedzialności reasekuratora $L = 8$ mln

Reasekurator pokrywa tę część szkody X, która przekracza 2 mln, ale wypłata nie może być większa niż 8 mln. Reasekurator odpowiada za szkody od 2 do 10 mln.

Wypłatę reasekuratora Y dla pojedynczej szkody X można zapisać jako:

$Y = \min(X, U+L) - \min(X, U)$

Korzystając ze wskazówki mamy:

$E[\min(X, d)] = r\left(\frac{d}{M}\right) \cdot E[X]$, gdzie $d = x \cdot M$

a) $E[Y] = E[\min(X, U+L)] - E[\min(X, U)]$

- $M \le U$, jeżeli szkoda maksymalna jest mniejsza od U to zawsze $X \le U$:

$$E[Y] = E[X] - E[X] = 0$$

- $V < M \leq V + L$

$$E[Y] = E[X] - E[X]\, r\left(\frac{V}{M}\right) = E[X]\left(1 - r\left(\frac{V}{M}\right)\right)$$

- $M > V + L$:

$$E[Y] = E[X]\, r\left(\frac{V+L}{M}\right) - E[X]\, r\left(\frac{V}{M}\right) = E[X]\left(r\left(\frac{V+L}{M}\right) - r\left(\frac{V}{M}\right)\right)$$

$$r(x) = \frac{1 - 0.5^{x}}{1 - 0.5}$$

- $M = 1$ mln:

$$E[Y] = 0$$

- $M = 5$ mln:

$$E[Y] = 1 \cdot \left(1 - r\left(\frac{2}{5}\right)\right) = 1 - \frac{1 - 0.5^{\frac{2}{5}}}{1 - 0.5} = 0.51$$

- $M = 20$ mln:

$$E[Y] = 1 \cdot \left(r\left(\frac{10}{5}\right) - r\left(\frac{2}{5}\right)\right) = 0.45$$

b) Wartość oczekiwaną szkód podlegających reasekuracji jako procent całkowitej przypisanej składki cedenta obliczamy zgodnie ze wzorem: $0.2 \cdot 0.7 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.65 \cdot 0.51 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.45 = 23.61\%$.