Zadanie 1.

W ramach modelu wewnętrznego w reżimie Wypłacalność II, aktuariusz analizuje wpływ wartości współczynników korelacji Pearsona pomiędzy stratami w liniach biznesowych na łączny wymóg wypłacalności. W swojej analizie rozważa metodę agregacji wariancji-kowariancji postaci:

$$SCR = \sqrt{\boldsymbol{x}^T * \Sigma * \boldsymbol{x}},$$

gdzie wektor $\boldsymbol{x}$ zawiera wymogi kapitałowe dla poszczególnych linii biznesowych i $\Sigma = [\rho_{i,j}]$ jest macierzą korelacji pomiędzy liniami biznesowymi.

a) Wyznacz pochodną $\frac{d\,SCR}{d\rho_{i,j}}$ i nadaj jej interpretacje w kontekście rozważanej analizy (2p).

b) W oparciu o wynik z p. a), wyjaśnij, w których liniach, ze względu na brzegowe wymogi kapitałowe, wpływ współczynnika korelacji jest największy na łączny wymóg kapitałowy (1p).

c) Podaj wady i zalety zastosowanej metody analizy wpływu współczynników korelacji, biorąc pod uwagę, że ostateczne wyznaczenie wymogu kapitałowego w ramach modelu wewnętrznego dokonywane jest w wyniku wykonania 100 tys. symulacji z wielowymiarowego rozkładu strat w liniach biznesowych, o różnych rozkładach brzegowych i kopule Gaussa (2p).

a) Możemy zapisać:

$$SCR = \sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j \rho_{i,j}}$$

Interesuje nas pochodna cząstkowa po konkretnym współczynniku korelacji $\rho_{i,j}$ dla $i \neq j$. Ponieważ macierz korelacji jest symetryczna ($\rho_{i,j} = \rho_{j,i}$), we wzorze pod pierwiastkiem człon zawierający ten współczynnik występuje dwa razy jako $x_i \rho_{i,j} x_j$ oraz $x_j \rho_{j,i} x_i$. W sumie daje to $2 x_i x_j \rho_{i,j}$.

$$\frac{d\,SCR}{d\rho_{i,j}} = \frac{d}{d\rho_{i,j}} \sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j \rho_{i,j}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j \rho_{i,j}}} \cdot 2 x_i x_j = \frac{x_i x_j}{SCR}$$

Wyrażenie $\frac{d\,SCR}{d\rho_{i,j}} \cdot h$ interpretujemy jako zmianę wymogu wypłacalności w wyniku zmiany współczynnika korelacji $\rho_{i,j}$ pomiędzy stratami w dwóch liniach biznesowych o h, gdzie zakładamy, że h jest małe.

b) Zmiana współczynnika korelacji pomiędzy liniami biznesowymi będzie miała największy wpływ na wymóg wypłacalności dla linii o najwyższych wymogach kapitałowych.

Wynika to z faktu, że mianownik jest stały. Wartość ułamka w tym przypadku jest tym większa im większa wartość wyrażenia $x_i x_j$.

c) Wada: metoda agregacji wariancji-kowariancji daje poprawy wymóg wypłacalności na poziomie portfela w sytuacji, gdy straty w liniach biznesowych pochodzą z rozkładu eliptycznego (np. wielowymiarowy rozkład normalny).

Zaleta: metoda agregacji wariancji-kowariancji pozwala na wyznaczenie (przybliżonego) wymogu wypłacalności przy innej wartości współczynników korelacji bez wykonywania symulacji.

Zadanie 2.

W oparciu o Rozporządzenie Delegowane Wypłacalność II, odpowiedz:

a) Jakie dwa warunki muszą spełniać stopy struktury terminowej podstawowej stopy procentowej wolnej od ryzyka (2p).

b) Na podstawie jakich instrumentów finansowych ustalane są podstawowe stopy procentowe wolne od ryzyka (2p).

c) Wyjaśnij pojęcie ostatecznej stopy forward (*Ultimate Forward Rate*) (1p).

a)

1. Rynek tych instrumentów finansowych musi być głęboki, płynny i przejrzysty.
2. Muszą one pozwalać na wyznaczenie podstawowych stóp procentowych wolnych od ryzyka w wiarygodny sposób (dodatkowo, jak precyzuje ust. 1, muszą być one skorygowane o ryzyko kredytowe).

b)

1. Podstawowym instrumentem są swapy stóp procentowych wyznaczane dla danej waluty.
2. Jeżeli dla danego terminu zapadalności (lub danej waluty) stopy swapów nie są dostępne na rynkach spełniających warunek głębokości, płynności i przejrzystości, wykorzystuje się stopy obligacji skarbowych (rządowych) emitowanych przez państwo, w którego walucie denominowane są zobowiązania.

c)

Ostateczna stopa forward (UFR) to ustalona administracyjnie, długoterminowa stopa procentowa, do której asymptotycznie zmierza (jest ekstrapolowana) krzywa stóp procentowych wolnych od ryzyka dla bardzo długich terminów zapadalności (czyli takich, dla których na rynku brakuje już płynnych instrumentów finansowych.

Jej fundamentalną cechą jest to, że jest ona stabilna w czasie i zmienia się jedynie z powodu zmian długoterminowych oczekiwań makroekonomicznych (np. długoterminowej oczekiwanej inflacji i realnej stopy procentowej). Mechanizm UFR ma na celu ochronę zakładów ubezpieczeń przed nadmierną i sztuczną zmiennością wymogów kapitałowych dla długoterminowych zobowiązań ubezpieczeniowych (np. w ubezpieczeniach na życie).

Zadanie 3.

Rozważamy dwuletnie ubezpieczenie z funduszem kapitałowym z gwarantowanymi okresowymi świadczeniami rentowymi. Bieżąca wartość rachunku wynosi 100 i ubezpieczony ma prawo do dwóch wypłat w wysokości 50 na koniec dwóch kolejnych okresów. Wartość rachunku w ubezpieczeniu zależy od stóp zwrotu z funduszu. W celu modelowania stóp zwrotu z funduszu stosujemy drzewo dwumianowe. Wartość funduszu może wzrosnąć o 5% lub spać o 5% z prawdopodobieństwami historycznymi na poziomie 0.75 i 0.25. Stopa wolna od ryzyka wynosi 3% rocznie w całym okresie. Pomijamy ryzyko śmiertelności. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka oraz fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

a) Opisz ryzyko finansowe w powyższym produkcie (1p).

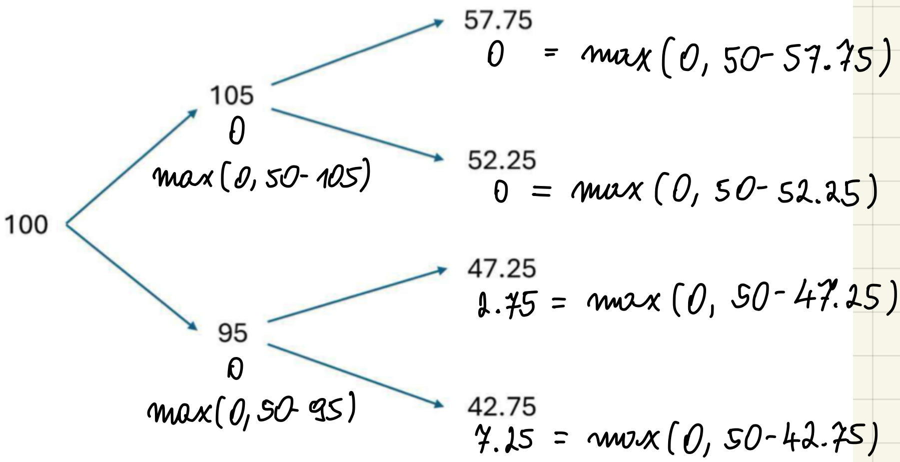
b) Jak można wyeliminować ryzyko finansowe w powyższym modelu, z punktu widzenia teoretycznego (1p).

c) Wyznacz wartość gwarancji okresowych świadczeń rentowych zgodnie z zasadą braku arbitrażu (3p).

a) Ryzyko finansowe w powyższym ubezpieczeniu związane jest ze spadkiem wartości rachunku ubezpieczeniowego, w wyniku zmiany wartości funduszu, co może prowadzić do niewypłacenia świadczeń rentowych w gwarantowanej wysokości i strat po stronie ubezpieczyciela.

b) W powyższym modelu ryzyko finansowe możemy zabezpieczyć konstruując portfel replikujący straty ubezpieczyciela.

c) Wyznaczamy wartość rachunku ubezpieczeniowego przed wypłatą świadczenia rentowego w momentach $t = 1,2$ w możliwych scenariuszach zmiany wartości funduszu:



Wartości rachunku w momencie $t = 2$ zostały wyznaczone przy założeniu, że w momencie $t = 1$ wypłacamy gwarantowane świadczenie rentowe w wysokości 50. Gwarancji jest *in-the-money* tylko w momencie $t = 2$ w scenariuszu spadku wartości funduszu w pierwszym okresie.

Wyznaczamy prawdopodobieństwo wolne od ryzyka $q = 0.8$, rozwiązując równanie:

$$\frac{1+5\%}{1+3\%}q + \frac{1-5\%}{1+3\%}(1-q) = 1$$

q - to prawdopodobieństwo wzrostu

Wartość gwarancji świadczeń rentowych to wartość oczekiwana wypłaty zdyskontowana liczbą okresów. Dwie górne ścieżki dają wynik zero.

Wartość oczekiwana 3 ścieżki to $0.2 \cdot 0.8 \cdot 2.75$.

Wartość oczekiwana 4 ścieżki to $0.2 \cdot 0.2 \cdot 7.25$.

Razem z dyskontowaniem:

$$\frac{1}{(1+0.03)^2}\left[0.2 \cdot 0.8 \cdot 2.75 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 7.25\right] = 0.27$$

Posiadając środki w wysokości 0.27 ubezpieczyciel może utworzyć portfel replikujący, który pokryje straty w wysokości 2.75 i 7.25 pojawiające się w scenariuszu spadku wartości funduszu w pierwszym okresie oraz, odpowiednio, spadku i wzrostu wartości funduszu w drugim okresie.

Zadanie 4.

Rozważamy ryzyko składki i ryzyko rezerw w reżimie Wypłacalność II w segmencie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej z tytułu użytkowania pojazdów mechanicznych (segment 1) oraz w segmencie ubezpieczenia od ognia i innych szkód rzeczowych (segment 4). Miary wielkości ryzyka składki wynoszą, odpowiednio, 30 i 40, odchylenia standardowe ryzyka składki wynoszą 10% i 8%, miary wielkości ryzyka rezerw wynoszą 20 i 30, odchylenia standardowe ryzyka rezerw wynoszą 9% i 10%, współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem składki i ryzykiem rezerw wynosi 0.5, współczynnik korelacji pomiędzy segmentami wynosi 0.25.

a) Stosujemy agregację hierarchiczną zgodnie z Formułą Standardową. Na pierwszym poziomie agregujemy ryzyko składki z ryzykiem rezerw dla każdego segmentu oddzielnie, na kolejnym poziomie agregujemy łączne ryzyko składki i rezerw pomiędzy dwoma segmentami. Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i ryzyka rezerw dla obu segmentów łącznie (zdywersyfikowany kapitał) zgodnie z Formułą Standardową (2p).

b) Wykorzystując ogólną definicję alokacji Eulera, wyprowadź wzór i przeprowadź alokację zdywersyfikowanego kapitału do poziomu ryzyka składki w segmencie 1 (3p).

$E_{1,1} = 30 \qquad E_{1,r} = 20 \qquad \rho_{1,r} = 0.5$

$\sigma_{1,1} = 0.1 \qquad \sigma_{1,r} = 0.09 \qquad \rho = 0.25$

$E_{2,1} = 40 \qquad E_{2,r} = 30$

$\sigma_{2,1} = 0.08 \qquad \sigma_{2,r} = 0.1$

a) $SCR_p = 3 \cdot \sqrt{(E_{p,1} \cdot \sigma_{p,1})^2 + (E_{p,r} \cdot \sigma_{p,r})^2 + 2 \cdot E_{p,1} \cdot \sigma_{p,1} \cdot E_{p,r} \cdot \sigma_{p,r} \cdot \rho_{1,r}}$

$SCR_1 = 3 \cdot \sqrt{(30 \cdot 0.1)^2 + (20 \cdot 0.09)^2 + 2 \cdot 30 \cdot 0.1 \cdot 20 \cdot 0.09 \cdot 0.5} = 12.6$

$SCR_2 = 3 \cdot \sqrt{(40 \cdot 0.08)^2 + (30 \cdot 0.1)^2 + 2 \cdot 40 \cdot 0.08 \cdot 30 \cdot 0.1 \cdot 0.5} = 16.11$

$SCR = \sqrt{SCR_1^2 + SCR_2^2 + 2 SCR_1 \cdot SCR_2 \cdot \rho}$

$SCR = \sqrt{12.6^2 + 16.11^2 + 2 \cdot 12.6 \cdot 16.11 \cdot 0.25} = 22.79$

b) Niech h oznacza dodatkową ekspozycję dla ryzyka składki w segmencie I.

Wyznaczamy miary ryzyka zgodnie z agregacją hierarchiczną:

$SCR(h) = \sqrt{(SCR_1(h))^2 + (SCR_2)^2 + 2 \cdot SCR_1(h) \cdot SCR_2 \cdot \rho}$

$SCR_1(h) = \sqrt{(SCR_{1,1}(h))^2 + (SCR_{1,r})^2 + 2 \cdot SCR_{1,1}(h) \cdot SCR_{1,r} \cdot \rho_{r,1}}$

$SCR_{1,1}(h) = 3 \cdot E_{1,1} \cdot (1+h)\, \sigma_{1,1}$

$SCR_{1,1} = 3 \cdot E_{1,1} \cdot \sigma_{1,1} \quad \Rightarrow \quad SCR_{1,1}(0) = SCR_{1,1}$

Alokacja Eulera wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$SCR(L_{1,1}|L) = \frac{d}{dh} SCR(h)\Big|_{h=0}$$

$$\frac{d\,SCR(h)}{dh} = \frac{d\,SCR(h)}{d\,SCR_1(h)} \cdot \frac{d\,SCR_1(h)}{d\,SCR_{1,1}(h)} \cdot \frac{d\,SCR_{1,1}(h)}{dh}$$

$$\frac{d\,SCR(h)}{d\,SCR_1(h)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{SCR(h)} \cdot \left[2\,SCR_1(h) + 2\,\varrho \cdot SCR_2\right] = \frac{SCR_1(h) + \varrho \cdot SCR_2}{SCR(h)}$$

$$\frac{d\,SCR_1(h)}{d\,SCR_{1,1}(h)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{SCR_1(h)} \cdot \left[2\,SCR_{1,1}(h) + 2 \cdot SCR_{1,r} \cdot \varrho_{r,1}\right] = \frac{SCR_{1,1}(h) + \varrho_{r,1}\,SCR_{1,r}}{SCR_1(h)}$$

$$\frac{d\,SCR_{1,1}(h)}{dh} = 3\,E_{1,1} \cdot \sigma_{1,1} = SCR_{1,1}$$

Gdy $h=0$:

$$SCR(0) = SCR$$
$$SCR_1(0) = SCR_1$$
$$SCR_{1,1}(0) = SCR_{1,1}$$

$$SCR(L_{1,1}|L) = \frac{SCR_1 + \varrho \cdot SCR_2}{SCR} \cdot \frac{(SCR_{1,1})^2 + SCR_{1,1} \cdot SCR_{1,r} \cdot \varrho_{r,1}}{SCR_1}$$

$$SCR(L_{1,1}|L) = \frac{12.6 + 0.25 \cdot 16.11}{22.79} + \frac{(3 \cdot 30 \cdot 0.1)^2 + (3 \cdot 30 \cdot 0.1) \cdot (3 \cdot 20 \cdot 0.09) \cdot 0.5}{12.6} =$$

$$= 6.09$$

Zadanie 5.

Aktuariusz monitoruje jakość swoich prognoz Value-at-Risk w ramach modelu kapitału ekonomicznego dla ryzyka finansowego. W oparciu o dzienne dane historyczne cen akcji, przeprowadził back-testing prognoz. Dla kolejnych momentów czasu, poczynając od 1 lutego 2024, z krokiem dziennym, oszacował 100 wartości Value-at-Risk straty jednodniowej na poziomie istotności 0.99 i porównał swoje prognozy z rzeczywistymi zaobserwowanymi stratami. Aktuariusz odnotował przekroczenia prognozy Value-at-Risk w kolejnych dniach o numerach 7, 9, 10, 26, 77, 89, 90, 91.

a) Wyjaśnij jak często spodziewasz się przekroczeń prognozy Value-at-Risk i intuicyjnie oceń jakoś prognoz, gdy zakładamy, że straty w kolejnych okresach są niezależne o takim samym rozkładzie (2p).

b) Załóżmy, że liczba przekroczeń prognozy Value-at-Risk tworzy ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Bernoulliego:

- Ile wynosi wartość prawdopodobieństwa sukcesu w tym rozkładzie? (1p).
- Zaproponuj test, który zweryfikowałby jakoś prognoz w oparciu o rozkład odstępów czasu pomiędzy przekroczeniami prognozy Value-at-Risk (2p).

a) Spodziewamy się jednego przekroczenia poziomu wyznaczonego przez prognozę VaR w ciągu 100 dni. Miara ryzyka VaR została niedoszacowana.

b) Wykorzystując klasyczne własności ciągu Bernoulliego i interpretację miary VaR możemy wnioskować:
- Prawdopobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie wynosi 0.01.
- Możemy wykorzystać dowolny test dopasowania rozkładu, gdzie weryfikujemy hipotezę, że odstępy czasu (mierzone w dniach) pomiędzy przekroczeniami VaR pochodzą z niezależnych rozkładów geometrycznych (liczba porażek do pierwszego sukcesu).

Można również zaproponować standardowy test zgodności χ^2 lub Kołmogorowa - Smirnowa, w którym hipotezą zerową jest to, że zaobserwowane odstępy czasu pochodzą z rozkładu geometrycznego z prawdopodobieństwem $p = 0.01$.

Zadanie 6.

Rozważamy uproszczony model wewnętrzny w reżimie Wypłacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego roku szkodowego. Stosujemy model Incremental Loss Ratio, w którym skumulowane wypłaty $(C_i, i = 0, \ldots, n)$, w przyszłych latach kalendarzowych *i*, opisane są wzorem: $C_0 = 100$, $C_i = C_{i-1} + X_i$, gdzie $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i
1	200	50
2	100	30
3	30	10

Podane oszacowania (μ_i, σ_i^2) są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie zmieniają się w kolejnych latach kalendarzowych. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0%.

a) Zapisz stratę jednoroczną i ostateczną, na które jesteśmy narażeni w ramach modułu ryzyka rezerw. Dokładnie wyjaśnij składowe strat (2p).

b) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w powyższym modelu wewnętrznym w reżimie Wypłacalność II, wyjaśnij wybór straty i miary ryzyka (2p).

c) W ogólności, analizujemy odchylenie standardowe straty jednorocznej do odchylenia straty ostatecznej w ryzyku rezerw. Wyjaśnij, czy dla linii biznesowej z długim okresem (losowego) rozwoju szkód spodziewasz się mniejszego, czy większego współczynnika? (1p).

C_i – skumulowana wartość wypłat na koniec roku i

$C_n = C_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

a) Stratę w horyzoncie jednorocznym definiujemy jako:

$L_{1YR} = E[C_n | C_1, C_0] - E[C_n | C_0]$

$E[C_n | C_0] = C_0 + E[X_1] + \ldots + E[X_n]$

$E[C_n | C_1, C_0] = C_1 + E[X_2] + \ldots + E[X_n] = C_0 + X_1 + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$

$L_{1YR} = X_1 - E[X_1] \sim N(0, 50^2)$

Stratę w horyzoncie ostatecznym definiujemy jako:

$L_{ULT} = E[C_n | C_n, C_{n-1}, \ldots, C_1, C_0] - E[C_n | C_0]$

$E[C_n | C_n, C_{n-1}, \ldots, C_1, C_0] = C_n$

$C_n = C_0 + X_1 + X_2 + X_3$ bo treści zadania $n = 3$

$L_{ULT} = X_1 + X_2 + X_3 - E[X_1 + X_2 + X_3] \sim N(0, 50^2 + 30^2 + 10^2)$

b) $VaR_{0.995}(L_{1YR}) = \mu + \sigma \, \Phi^{-1}(\alpha)$

$L_{1YR} \sim N(0, 50^2)$

$VaR_{0.995}(L_{1YR}) = 0 + 50 \cdot \Phi^{-1}(0.995) = 50 \cdot 2.57 = 128.5$

c) Stosunek o którym mowa w zadaniu to $R = \dfrac{\sigma(L_{1YR})}{\sigma(L_{ULT})}$

Spodziewamy się niższego współczynnika, ponieważ strata ostateczna ma większą zmienność w sytuacji, gdy narażeni jesteśmy na losowy rozwój szkód z dłuższym ogonem rozwoju .

Zadanie 7.

Firma ubezpieczeniowa przygotowuje bilans w reżimie Wypłacalność II na koniec 2024r. Wyznaczyła:

- wielkość środków własnych (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań) równą 100,
- wartość najlepszego oszacowania zobowiązań (*best estimate*) równą 200,
- kapitałowe wymogi wypłacalności na kolejne trzy lata na poziomie 100, 50, 20 (zakładamy, że wymogi wyznaczane są na początku danego roku kalendarzowego).

Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% na koniec 2024. Wartość najlepszego oszacowania przepływu pieniężnego w roku 2025, które jest uwzględnione w najlepszym oszacowaniu zobowiązania na koniec 2024, wynosi 100 (zakładamy, że przepływ następuje na końcu roku, przed wyceną zobowiązania na koniec 2025). Na koniec roku 2025 okazało się, że przepływ pieniężny w roku 2025 wyniósł 125, zamiast oczekiwanych 100, i aktuariusz postanowił zmienić założenia wyceny, co skutkowało zwiększeniem najlepszego oszacowania zobowiązań i kolejnych kapitałowych wymogów wypłacalności o 20% w porównaniu z oszacowaniem, które zostałoby policzone na koniec 2025 przy parametrach ustalonych na koniec 2024. Struktura terminowa stóp procentowanych nie zmieniła się.

a) Wyznacz wartość najlepszego oszacowania zobowiązań na koniec 2025 (1p).

b) Wyznacz margines ryzyka na koniec 2025 (1p).

c) Wyznacz wielkość środków własnych na koniec 2025, przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka (2p).

d) Wyznacz *reverse stress* dla przepływu pieniężnego w 2025 r., przy którym wartość środków własnych spadnie do poziomu 80 (1p).

Na koniec 2024, $t=0$:

$r_f = 2\%$

$OF_0 = 100$

$BEL_0 = 200$

$SCR_1 = 100 \qquad SCR_2 = 50 \qquad SCR_3 = 20$

$E[C_1] = 100$

a) Wartość najlepszego oszacowania spełnia zależność:

$$BEL_0 = \frac{E[C_1] + BEL_1}{1+r_f}$$

$$BEL_1 = BEL_0(1+r_f) - E[C_1]$$

$$BEL_1 = 200 \cdot 1.02 - 100 = 104$$

Skoro aktuariusz zwiększył oszacowanie o 20%, nowa wartość to po prostu: $104 \cdot 1.2 = 124.8$

b) $RM = CoC \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{SCR_i}{(1+r_1)^i}$

$RM = 0.06 \cdot \left(\frac{50}{1.02} + \frac{20}{1.02^2} \right) = 4.09$ (w odp. jest błąd)

Po zmianie założeń wyceny, wynosi $4.09 \cdot 1.2 = 4.91$

c) Zmiana środków własnych w 2025 jest wynikiem następujących zmian:

1. Strata zmierzona z realizacji przepływu: z zakładu wypłynęło 125 a miało wypłynąć 100. Majątek firmy skurczył się o tę dodatkową kwotę, więc środki własne OF spadają o 25.
2. Strata zmierzona ze zmianą założeń wyceny: aktuariusz podwyższył wartość zobowiązań (BEL i RM) o 20%. stąd strata wynosi $(104 + 4.09) \cdot 0.2 = 21.62$
3. Stopa zwrotu na środkach własnych wynosi $100 \cdot 0.02 = 2$
4. Uwolnienie marginesu ryzyka wynosi $100 \cdot 0.06 = 6$

Wartość środków własnych na koniec roku 2025 wynosi

$100 - 25 - 21.62 + 2 + 6 = 61.38$

d) W oparciu o analizę w punkcie c), szukamy x, który spełnia równanie:

$100 - x - 21.62 + 6 + 2 = 80$

$x = 6.38$

Zadanie 8.

Rozważamy dwie linie biznesowe, w których wyznaczono jednoroczne oczekiwane zyski per ekspozycja na poziomie 30 i 50 oraz jednoroczne wymogi kapitałowe per ekspozycja na poziomie 100 i 175. Wymogi kapitałowe oraz oczekiwane zyski zależą liniowo od ekspozycji. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy jednorocznymi stratami w liniach wynosi 0.25. Wymogi kapitałowe dla linii i spółki wyznaczamy jako trzykrotności odchylenia standardowego jednorocznej straty. Ekspozycje w obu liniach wynoszą 100 jednostek.

a) Wyznacz miary RORAC dla linii biznesowych przy alokacji Eulera (2p).

b) Uzasadnij, w której linii należy zwiększyć ekspozycję, aby zmaksymalizować RORAC dla spółki (1p).

c) Wyjaśnij, co oznacza, z biznesowego i matematycznego punktu widzenia, własność zgodności alokacji Eulera z miarą RORAC (RORAC *compatibility*), i czy własność ta zachodzi także dla innych metod alokacji (2p).

a) $RC(L_1+L_2) = \sqrt{RC_1^2 + R_2^2 + 2\rho \cdot RC_1 \cdot RC_2}$

$$RC(L_1+L_2) = \sqrt{100^2 + 175^2 + 2 \cdot 100 \cdot 175 \cdot 0.25} = 222.21$$

Alokacja Eulera:

$$EC(L_i|L) = \frac{RC_i^2 + \rho \cdot RC_1 \cdot RC_2}{RC(L_1+L_2)}$$

$$EC(L_1|L) = \frac{100^2 + 100 \cdot 175 \cdot 0.25}{222.21} = 64.69$$

$$EC(L_2|L) = \frac{175^2 + 100 \cdot 175 \cdot 0.25}{222.21} = 157.52$$

$$RORAC = \frac{\text{zysk całkowity}}{\text{zaalokowany kapitał}}$$

$$RORAC_{\text{linia I}} = \frac{30}{64.69} = 0.46$$

$$RORAC_{\text{linia II}} = \frac{50}{157.52} = 0.31$$

b) Linia I generuje 46 groszy zysku z każdej złotówki kapitału. Linia II generuje tylko 31 groszy. Aby zmaksymalizować RORAC całej spółki, kapitał powinien pracować tam, gdzie jest bardziej efektywny czyli w linii pierwszej.

c) Zgodność alokacji Eulera z miarą RORAC oznacza, że zwiększenie ekspozycji (o małą wielkość) w linii o najwyższym RORAC zwiększy RORAC na poziomie portfela. W konsekwencji, możemy podejmować decyzje inwestycyjne w oparciu o miary RORAC. Alokacja Eulera jest jedyną alokacją spełniającą ten warunek.

Zadanie 9.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie w wysokości 100 i 200 w terminach zapadalności równych 3 i 6 lat. Struktura terminowa stóp procentowych wyznaczona jest w oparciu o stopy w terminach zapadalności 5 i 10 lat w wysokości, odpowiednio, 5% i 7%. Stopy w pozostałych terminach zapadalności, pomiędzy 5 i 10 lat, definiowane są poprzez liniową aproksymację stóp z terminów zapadalności 5 i 10 lat. Struktura terminowa stóp w terminach zapadalności poniżej 5 lat i powyżej 10 lat jest natomiast płaska. Przyjmujemy, że stopy są stopami spot oprocentowania ciągłego. Zmiany stóp w terminach 5 i 10 lat w okresie tygodnia modelowane są przy pomocy łącznego rozkładu normalnego:

$$N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\left(\frac{0.5}{100}\right)^2 & \frac{0.5}{100}*\frac{1}{100}*0.5\\ \frac{0.5}{100}*\frac{1}{100}*0.5 & \left(\frac{1}{100}\right)^2\end{bmatrix}\right).$$

Poniżej zaniedbujemy zmiany wartości zobowiązania związane ze skróceniem terminu zapadalności.

a) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu wyznacz zmianę wartości zobowiązania w wyniku spadku stóp procentowych w ciągu tygodnia w terminach 5 i 10 lat o 2 punkty procentowe (2p).

b) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu, wyznacz ryzyko zmiany wartości zobowiązania w horyzoncie jednego tygodnia związane ze zmianą wartości zobowiązania w wyniku zmian stóp procentowych. Jako miarę ryzyka zastosuj miarę Value-at-Risk na poziomie 99% (3p).

a) Zadanie wymaga wyceny przepływów w momentach $t=3$ i $t=6$ mając do dyspozycji tylko stopy rynkowe dla $t=5$ i $t=10$.

Stopę dla terminu zapadalności $t=3$ wyznaczamy jako:

$r_3 = r_5$ ponieważ krzywa poniżej 5 lat jest płaska.

Stopę dla termin zapadalności $t=6$ wyznaczamy jako:

$r_6 = \frac{4}{5} r_5 + \frac{1}{5} r_{10}$ $\quad$ r_6 znajduje się pomiędzy 5 a 10 rokiem.

Stosowana jest aproksymacja liniowa (średnia ważona). Odległość od 5 do 10 to 5 lat. Rok 6 leży w $\frac{1}{5}$ tej drogi. Dlatego stopa r_6 to w przeważającej części stopa r_5 (waga $\frac{4}{5}$) skorygowana o wpływ stopy r_{10} (waga $\frac{1}{5}$).

Wartość zobowiązań to suma zdyskontowanych przepływów (przy kapitalizacji ciągłej dyskontujemy mnożąc przez e^{-rt}):

$$P(r_5, r_{10}) = 100e^{-3r_3} + 200e^{-6r_6} = 100e^{-3r_5} + 200e^{-6\left(\frac{4}{5}r_5 + \frac{1}{5}r_{10}\right)} =$$

$$= A(r_5) + B(r_5, r_{10})$$

Wyznaczamy pochodne na potrzeby aproksymacji Taylora:

$$A_{r_5}(r_5) = -3 \cdot 100 \cdot e^{-3r_5}$$

$$B_{r_5}(r_5, r_{10}) = -\frac{6 \cdot 4}{5} \cdot 200 \cdot e^{-6r_6}$$

$$B_{r_{10}}(r_5, r_{10}) = -\frac{6}{5} \cdot 200\, e^{-6r_6}$$

Aproksymacja Taylora pierwszego rzędu mówi, że zmiana wartości funkcji jest w przybliżeniu równa sumie iloczynów jej pochodnych cząstkowych i zmian poszczególnych zmiennych.

$$\Delta P = P(r_5 + h_5, r_{10} + h_{10}) - P(r_5, r_{10}) = P_{r_5} \cdot h_5 + P_{r_{10}} \cdot h_{10}$$

$$\Delta P = \left(-3 \cdot 100 \cdot e^{-3 \cdot r_3} - \frac{6 \cdot 4}{5} \cdot 200 \cdot e^{-6 \cdot r_6}\right)\left(-\frac{2}{100}\right) +$$
$$+ \left(-\frac{6}{5} \cdot 200 \cdot e^{-6r_6}\right)\left(-\frac{2}{100}\right)$$

$$r_3 = 0.05$$

$$r_6 = 0.054$$

$$\Delta P = 952.53 \cdot 0.02 + 173.58 \cdot 0.02 = 22.52$$

b) Ponieważ zmiany stóp procentowych pochodzą z rozkładu normalnego to $\Delta P = P_{r_5} \cdot h_5 + P_{r_{10}} \cdot h_{10}$ również pochodzi z rozkładu normalnego z odpowiednio przeskalowaną wariancją.

$$\Delta P \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = 952.53^2 \cdot \left(\frac{0.5}{100}\right)^2 + 173.58^2 \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 2 \cdot 952.53 \cdot 173.58 \cdot \frac{0.5}{100} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{100} \cdot 0.5 = 5.82^2$$

$$VaR_{0.99} = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(0.99) = 0 + 5.82 \cdot 2.326 = 13.55$$

Zadanie 10.

Rozważamy stratę L z rozkładu Pareto $Pa(c,1)$, $c > 1$, postaci:

$$F(x) = 1 - (1+x)^{-c}, \quad x \geq 0.$$

Znamy miary ryzyka Value-at-Risk i Expected Shortfall dla rozkładu Pareto:

$$VaR_\alpha(L) = (1-\alpha)^{-\frac{1}{c}} - 1, \quad ES_\alpha(L) = \frac{c}{c-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{c}} - 1.$$

a) Wyznacz (1p)

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)}.$$

b) Dla ustalonego $\beta \in (0,1)$, znajdź $\alpha \in (0,1)$, przy którym zachodzi $VaR_\beta(L) = ES_\alpha(L)$ (1p).

c) Czy równanie z p. b) ma zawsze rozwiązanie? (1p).

d) Aktuariusz na potrzeby wewnętrznej oceny ryzyka dokonuje wyboru miary ryzyka traktując miarę ryzyka z reżimu Wypłacalność II jako benchmark. Uzasadnij, jak należy interpretować wyniki w punktach a) i c) w kontekście wyboru miary ryzyka Value-at-Risk vs Expected Shortfall w modelach kapitału ekonomicznego i kwantyfikacji ekstremalnie dużej straty w przypadku strat z rozkładu typu Pareto z bardzo niskim i bardzo wysokim parametrem c (2p).

a) $$\lim_{\alpha \to 1^-} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \lim_{\alpha \to 1^-} \frac{\frac{c}{c-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{c}} - 1}{(1-\alpha)^{-\frac{1}{c}} - 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{\alpha \to 1^-} \frac{\frac{c}{c-1} - \frac{1}{(1-\alpha)^{-\frac{1}{c}}}}{1 - \frac{1}{(1-\alpha)^{-\frac{1}{c}}}} = \frac{c}{c-1}$$

b) $$(1-\beta)^{-\frac{1}{c}} - 1 = \frac{c}{c-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{c}} - 1$$

$$(1-\beta)^{-\frac{1}{c}} = \frac{c}{c-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{c}}$$

$$\left(\frac{c-1}{c}\right)(1-\beta)^{-\frac{1}{c}} = (1-\alpha)^{-\frac{1}{c}} \quad / \, (\,)^{-c}$$

$$(1-\alpha) = \left(\frac{c-1}{c}\right)^{-c}(1-\beta)$$

$$\alpha = 1 - (1-\beta)\left(\frac{c-1}{c}\right)^{-c}$$

$$\alpha = 1 - (1-\beta)\left(\frac{c}{c-1}\right)^{c}$$

c) Parametr $c > 1$ z definicji rozkładu Pareto. Gdy wartość c dąży do 1 wtedy $\left(\frac{c}{c-1}\right)^c$ dąży do nieskończoności. Dostajemy wtedy $\alpha < 0$. Ponieważ α ma należeć do przedziału $(0, 1)$ to równanie nie zawsze ma rozwiązanie.

d) Przy niskich wartościach parametru c, ogon w rozkładzie Pareto jest ciężki, miary VaR i ES przy wysokich poziomach ufności zwracają istotnie różne wyniki i miara VaR potencjalnie nie opisuje poprawnie ryzyka w ogonie. Należy rozważyć wybór ES jako miary ryzyka. Przy dużych wartościach parametru c, ogon w rozkładzie Pareto jest lżejszy, miary VaR i ES przy wysokich poziomach ufności zwracają podobne wyniki i obie miary VaR i ES opisują poprawnie ryzyko w ogonie.