Zadanie 1.

Wyjaśnij pojęcia, podaj przykłady oraz metody zarządzania ryzykiem:

a) Systematycznym i niesystematycznym (2p).

b) Negatywnej selekcji – *adverse selection* (1p).

c) Pokusy nadużycia – *moral hazard* (1p).

d) Operacyjnym (1p).

Pełny punkt można otrzymać tylko w sytuacji pełnego opisu czynnika ryzyka.

a) Ryzyko systematyczne i niesystematyczne

1 Ryzyko systematyczne (rynkowe, niedywersyfikowalne)

- Wyjaśnienie: Jest to ryzyko wynikające z ogólnorynkowych lub makroekonomicznych czynników, które wpływają na cały rynek lub gospodarkę. Nie można go wyeliminować poprzez dodawanie kolejnych, różnych aktywów do portfela (nie ulega dywersyfikacji).
- Przykłady: Zmiany stóp procentowych przez bank centralny, wybuch wojny, globalna pandemia (np. COVID-19), recesja gospodarcza, nagłe skoki inflacji.
- Metody zarządzania:
  - Hedging (zabezpieczanie): Wykorzystanie instrumentów pochodnych (np. opcje, kontrakty futures), aby zająć pozycję odwrotną i zneutralizować spadki na rynku.
  - Alokacja aktywów: Przenoszenie kapitału do tzw. "bezpiecznych przystani" (safe havens), np. obligacji skarbowych czy złota w czasach zawirowań.
  - Zarządzanie wskaźnikiem Beta: Dostosowanie portfela tak, aby jego wrażliwość na ruchy rynkowe (Beta) była niższa, jeśli spodziewamy się spadków.

1 Ryzyko niesystematyczne (specyficzne, dywersyfikowalne)

- Wyjaśnienie: Jest to ryzyko związane z konkretną firmą, branżą lub projektem. Dotyka tylko pojedynczego podmiotu lub wąskiej grupy podmiotów i jest niezależne od ogólnej sytuacji rynkowej.
- Przykłady: Strajk pracowników w konkretnej fabryce, pożar magazynu danej firmy, błędne decyzje zarządu, przegrany proces sądowy, wejście na rynek silnego konkurenta w danej niszy.
- Metody zarządzania:
  - Dywersyfikacja: Główna i najskuteczniejsza metoda. Polega na budowaniu portfela z aktywów, które nie są ze sobą skorelowane (np. kupowanie akcji spółek z różnych sektorów gospodarki). Jeśli jedna spółka traci z powodu swoich problemów, inne mogą zyskiwać lub pozostać stabilne, co niweluje stratę.

b) Negatywna selekcja (Adverse selection)

- Wyjaśnienie: Zjawisko wynikające z asymetrii informacji występującej przed zawarciem transakcji. Jedna ze stron (zazwyczaj kupujący lub ubezpieczający się) posiada lepszą wiedzę o swoim stanie/ryzyku niż druga strona. Prowadzi to do sytuacji, w której na rynku zostają tylko produkty gorszej jakości lub do ubezpieczenia zgłaszają się głównie osoby o bardzo wysokim ryzyku, co wypycha z rynku osoby o niskim ryzyku.
- Przykład: Osoby przewlekle chore są bardziej skłonne kupić drogie i pełne ubezpieczenie zdrowotne niż osoby młode i zdrowe.
- Metody zarządzania:
  - Screening (selekcja/filtrowanie): Pozyskiwanie dodatkowych informacji przez stronę mniej poinformowaną przed podpisaniem umowy (np. obowiązkowe badania lekarskie przed zakupem polisy na życie, sprawdzanie historii kredytowej w BIK przed udzieleniem pożyczki).
  - Signaling (sygnalizowanie): Strona posiadająca lepsze cechy (dobry produkt) wysyła wiarygodny sygnał (np. sprzedawca auta daje roczną gwarancję na używany pojazd, uczelnia wydaje dyplom potwierdzający wiedzę pracownika).
  - Pule grupowe / przymus ubezpieczeniowy: Oferowanie ubezpieczeń dla całych grup (np. ubezpieczenia pracownicze), co wymusza udział zarówno osób zdrowych, jak i chorych, uśredniając ryzyko.

c) Pokusa nadużycia (Moral hazard)

- Wyjaśnienie: Zjawisko wynikające z asymetrii informacji występującej PO zawarciu transakcji. Polega na tym, że po zabezpieczeniu się przed ryzykiem (np. po wykupieniu ubezpieczenia lub otrzymaniu gwarancji ratunku), dany podmiot zmienia swoje zachowanie na bardziej ryzykowne, ponieważ wie, że koszty ewentualnej porażki poniesie ktoś inny.
- Przykład: Kierowca po wykupieniu pełnego ubezpieczenia AC zaczyna jeździć bardziej agresywnie i przestaje parkować na strzeżonych parkingach.
- Metody zarządzania:
  - Udział własny i franszyza redukcyjna (Deductibles and co-payments): Przerzucenie części kosztów na ubezpieczonego. Jeśli kierowca wie, że za pierwszą szkodę do kwoty 1000 zł zapłaci z własnej kieszeni, będzie jeździł ostrożniej.
  - Monitoring i kontrola: Wymóg instalacji systemów alarmowych przeciwpożarowych w ubezpieczonym budynku lub montaż telematyki (GPS) w aucie, która śledzi styl jazdy i uzależnia od niego wysokość składki.
  - Odpowiednie systemy motywacyjne (klauzule umowne): Uzależnienie premii dla zarządu banku od długoterminowych wyników, a nie od krótkoterminowych, ryzykownych zysków.

d) Ryzyko operacyjne

- Wyjaśnienie: Jest to ryzyko straty wynikające z nieodpowiednich lub zawodnych wewnętrznych procesów, ludzi i systemów, lub ze zdarzeń zewnętrznych. (Obejmuje ryzyko prawne, ale zazwyczaj wyklucza ryzyko strategiczne i reputacyjne). Zasadniczo to ryzyko "codziennego prowadzenia biznesu".
- Przykłady: Błąd pracownika, oszustwo wewnętrzne, awaria serwerów firmy, atak hakerski paraliżujący sieć IT, błędy w księgowaniu, zła organizacja pracy prowadząca do pomyłek w dostawach, pożar biurowca, powódź niszcząca maszyny, nagłe zmiany w prawie.
- Metody zarządzania:
  - Kontrole wewnętrzne i audyty.
  - Plany ciągłości działania: Posiadanie zapasowych serwerowni, kopii zapasowych danych w chmurze (backup), alternatywnych lokalizacji biurowych w razie katastrofy.
  - Szkolenia pracowników: Regularne uświadamianie pracowników w zakresie cyberbezpieczeństwa (np. testy phishingowe) i procedur BHP.

Zadanie 2.

Wymień i scharakteryzuj krótko wszystkie podmoduły ryzyka w obrębie modułu ryzyka rynkowego zgodnie z Rozporządzeniem Delegowanym Wypłacalność II. Dla jednego wybranego podmodułu ryzyka opisz krótko jak wyznaczamy wymogi kapitałowe (5p).

1. Podmoduł ryzyka stopy procentowej: odzwierciedla wrażliwość wartości aktywów, zobowiązań oraz instrumentów finansowych na zmiany lub zmienność struktury terminowej stóp procentowych wolnych od ryzyka. Ryzyko to wynika z ewentualnego niedopasowania zapadalności aktywów i zobowiązań ubezpieczeniowych.

2. Podmoduł ryzyka cen akcji: odzwierciedla wrażliwość wartości na zmiany poziomu lub zmienność rynkowych cen akcji. W ramach formuły standardowej akcje dzieli się na różne typy (np. Typ 1 – akcje notowane na rynkach w EOG/OECD; Typ 2 – np. rynki wschodzące, akcje nienotowane), dla których stosuje się odmienne parametry ryzyka.

3. Podmoduł ryzyka cen nieruchomości: obejmuje wrażliwość wartości aktywów na zmiany poziomu lub zmienność rynkowych cen nieruchomości. Dotyczy to m.in. bezpośrednich inwestycji w grunty czy budynki.

4. Podmoduł ryzyka spreadu: odzwierciedla wrażliwość wartości aktywów (przede wszystkim dłużnych papierów wartościowych, takich jak obligacje korporacyjne) na zmiany poziomu lub zmienność spreadów kredytowych, czyli premii za ryzyko ponad stopę zwrotu wolną od ryzyka.

5. Podmoduł ryzyka walutowego: pokrywa ryzyko wrażliwości na zmiany poziomu lub zmienność kursów wymiany walut. Jest to kluczowe w sytuacji występowania niedopasowania walutowego (gdy zakład np. posiada zobowiązania ubezpieczeniowe w PLN, ale część aktywów inwestuje w EUR).

6. Podmoduł koncentracji ryzyka rynkowego: odzwierciedla dodatkowe ryzyko ponoszone przez zakład ubezpieczeń wynikające z braku odpowiedniej dywersyfikacji portfela inwestycyjnego lub z posiadania nadmiernej ekspozycji na jednego emitenta (lub grupę powiązanych emitentów), co w razie jego problemów finansowych grozi dużymi stratami.

Do wyznaczania wymogów kapitałowych (SCR) w standardowej formule Wypłacalność II powszechnie stosuje się metodę scenariuszową (szokową).

Opis na przykładzie podmodułu ryzyka cen nieruchomości.

1. Zastosowanie szoku rynkowego: analiza zakłada skrajny, niekorzystny scenariusz rynkowy. Dla rynku nieruchomości przepisy definiują ten szok jako natychmiastowy spadek rynkowej wartości wszystkich posiadanych nieruchomości o 25%.

2. Ocena wpływu: następnie oblicza się, jak tak zdefiniowany szok wpłynąłby na bilans ekonomiczny (aktywa i pasywa) zakładu ubezpieczeń.

3. Wynik (wymóg kapitałowy): wymóg kapitałowy dla tego podmodułu (oznaczany jako $SCR_{property}$) jest równy dokładnej kwocie spadku wartości podstawowych środków własnych, który nastąpiłby po zaaplikowaniu wspomnianego szoku (-25% na ceny nieruchomości).

Zadanie 3.

Rozważamy wyłącznie ryzyko długowieczności dla aktualnego portfela rent z końca roku 2024. Kapitałowy wymóg wypłacalności dla ryzyka długowieczności dla portfela rent w reżimie Wypłacalność II na koniec roku 2024 został wyznaczony na poziomie 50. Najlepsze oszacowania zobowiązań rentowych w reżimie Wypłacalność II w kolejnych latach kalendarzowych zostały zaprognozowane w następujący sposób:

Rok kalendarzowy i	Najlepsze oszacowanie zobowiązań rentowych (BEL) na początku roku kalendarzowego i
2025	200
2026	150
2027	70

Najlepsze oszacowanie zobowiązań rentowych jest obliczane jako bieżąca wartość oczekiwana zdyskontowanych przyszłych wypłacanych świadczeń rentowych przy założeniu, że wypłata świadczeń rentowych następuje na końcu roku kalendarzowego. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 5%.

a) Wyznacz wartość zobowiązania rentowego w reżimie Wypłacalność II na koniec 2024 roku, w tym wyznacz wartość najlepszego oszacowania (*best estimate*) i margines ryzyka (*risk margin*) przy koszcie kapitału równym 6%. Margines ryzyka zawiera wyłącznie ryzyko długowieczności. Wymogi kapitałowe dla ryzyka długowieczności, które wykorzystasz do wyznaczenia marginesu ryzyka, należy wyznaczyć stosując aproksymację opartą na bieżącej wartości wymogu dla ryzyka długowieczności i prognozie BEL w kolejnych latach kalendarzowych (2p).

b) Wielkość środków własnych w reżimie Wypłacalność II (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań) na koniec 2024r. wynosi 150. Na koniec roku 2025 roku okazało się, że wypłacono świadczenia rentowe w wysokości 70. Aktuariusz postanowił nie zmieniać założenia wyceny dotyczących najlepszego oszacowania zobowiązań rentowych i wymogu kapitałowego zgodnie z założeniami i projekcją z końca 2024r. Wyznacz wielkość środków własnych na koniec roku 2025 przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka – wyraźnie opisz zmiany kluczowych pozycji (2p).

c) Wyjaśnij, jak zmieniałby się wielkość środków własnych w p. b), gdyby aktuariusz zmienił założenia i oszacowałby wyższą wartość zobowiązań rentowych i marginesu ryzyka (1p).

a) Wartość zobowiązania = BEL + RM

$$SCR(t) = SCR(0) \cdot \frac{BEL(t)}{BEL(0)}$$

$$SCR(1) = 50$$

$$SCR(2) = 50 \cdot \frac{150}{200} = 37.5$$

$$SCR(3) = 50 \cdot \frac{70}{200} = 17.5$$

$$RM = CoC \cdot \sum_{i=1} \frac{SCR(i)}{(1+r_f)^i} = 0.06 \left(\frac{50}{1.05} + \frac{37.5}{1.05^2} + \frac{17.5}{1.05^3} \right) = 5.81$$

Wartość zobowiązania na koniec roku 2024 wynosi $200 + 5.81 = 205.81$

b) $$BEL(0) = \frac{E[C_1] + BEL(1)}{1+r_f}$$

$$E[C_1] = BEL(0)(1+r_f) - BEL(1)$$

$$E[C_1] = 200 \cdot 1.05 - 150 = 60$$

1. Strata związana z realizacją przepływu z tytułu rent vs oczekiwany przepływ wynosi $70 - 60 = 10$
2. Stopa zwrotu na środkach własnych wynosi $150 \cdot 0.05 = 7.5$
3. Uwolnienie marginesu ryzyka wynosi $50 \cdot 0.06 = 3$

Środki własne na koniec 2025 roku wynoszą $150 - 10 + 7.5 + 3 = 150.5$

c) Środki własne = Aktywa − Zobowiązania (BEL + RM)

Wzrost wartości zobowiązania na koniec 2025 spowodowałby zmniejszenie środków własnych.

Zadanie 4.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie, które ma postać opcji put na pewien indeks bazowy z ceną wykonania 100 i terminem wykonania 10 lata. Aktualna cena indeksu bazowego wynosi 100. Wartość zobowiązania wyceniana jest zgodnie z modelem Blacka-Scholesa przy aktualnych wartościach parametrów stopy procentowej wolnej od ryzyka, zmienności implikowanej dla opcji put i ceny indeksu bazowego. Aktualna zmienność implikowana dla opcji put na indeks bazowy wynosi 20% i zmienność implikowana dla opcji put na indeks bazowy jest niezależna od ceny wykonania i terminu wykonania. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i aktualna stopa wolna od ryzyka wynosi 3% (oprocentowanie ciągłe). Firma postanawia skonstruować portfel zabezpieczający zobowiązanie. Na rynku finansowym dostępny jest rachunek bankowy płacący stopę wolną od ryzyka, indeks bazowy oraz opcja put na indeks bazowy z ceną wykonania 100 i terminem wykonania 5 lat.

a) Podaj skład portfela zabezpieczającego pozycje *delta-vega* i wyznacz strategię *delta-vega* hedgingową (liczbę instrumentów), gdzie dopasowujemy wartości aktywów i zobowiązań oraz parametry greckie *delta* (wrażliwość względem zmiany ceny indeksu bazowego) i *vega* (wrażliwość względem zmiany zmienności implikowanej dla opcji) dla wartości aktywów i zobowiązań, wykorzystaj najbliższe wartości z tablic rozkładu normalnego (2p).

b) Wyznacz stratę środków własnych w horyzoncie jednego tygodnia w scenariuszu wzrostu zmienności implikowanej dla opcji put do poziomu 25%, przy pozostałych parametrach na niezmienionym poziomie. Przyjmij taki sam termin zapadalności instrumentów. (2p).

c) Wyjaśnij, dlaczego zaobserwowano stratę/zysk w p. b) mimo zastosowania portfela zabezpieczającego z p. a) (1p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$

$$Delta\ opcji\ put = -N(-d_1), \qquad Vega\ opcji\ put = S(0)f(d_1)\sqrt{T},$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

a) Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, możemy wyznaczamy ceny opcji put oraz wartości parametrów delta i vega dla dwóch opcji. Dla zobowiązania, podstawiając:

$$r = 0.03, \sigma = 0.2, K = 100, T = 10, S(0) = 100,$$

$$d_1 = \frac{1}{0.2\sqrt{10}}\left(\ln\left(\frac{100}{100}\right) + \left(0.03 + \frac{0.2^2}{2}\right)\cdot 10\right) = \frac{\sqrt{10}}{4} = 0.790569$$

$$d_2 = \frac{\sqrt{10}}{4} - 0.2\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{20} = 0.158114$$

$$N(-d_1) = 0.214598$$

$$N(-d_2) = 0.437184$$

$$P = -0.214598\cdot 100 + 0.437184\cdot 100\cdot e^{-0.03\cdot 10} = 10.93$$

$$\text{Delta} = -0.21$$

$$\text{Vega} = 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right\} \cdot \sqrt{10} = 92.29$$

Dla instrumentu zabezpieczającego zobowiązanie, podstawiając:

$$r = 0.03, \sigma = 0.2, K = 100, T = 5, S(0) = 100,$$

dostajemy: cena opcji = 10.39, delta = -0.28, vega = 76.30.

Niech a oznaczę liczbę indeksów bazowych, b – liczbę opcji put z terminem wykupu 5 lat, c – wartość środków na rachunku bankowym. Rozwiązujemy układ równań, gdzie poszczególne równania odzwierciedlają ceny, parametry delta i vega dla instrumentów w portfelu zabezpieczającym i zobowiązania:

$$10.93 = a * 100 + b * 10.39 + c,$$
$$-0.21 = a - b * 0.28,$$
$$92.29 = b * 76.30.$$

Dostajemy $a = 0.13, b = 1.21, c = -15.04$.

1. Równanie na vegę (wrażliwość na zmienność):

$$92.29 = b \cdot 76.30$$

Indeks bazowy oraz gotówka na koncie nie zależą od zmienności implikowanej (ich vega wynosi 0). Jedynym instrumentem w naszym portfelu, który ma vegę jest 5-letnia opcja put. Dlatego musimy kupić dokładnie taką ilość tych opcji aby wyrównać vegę zobowiązania.

2. Równanie na deltę (wrażliwość na cenę indeksu):

$$-0.21 = a \cdot 1 - b \cdot 0.28$$

Delta indeksu bazowego zawsze wynosi 1. Mamy już w portfelu b opcji które wnoszą swoją deltę musimy dokupić trochę indeksu bazowego.

3. Równanie na wartość (dopasowanie kapitału):

$$10.93 = a \cdot 100 + b \cdot 10.39 + c$$

Wartość zobowiązania musi być równa wartości rynkowej naszych aktywów.

b) Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, możemy wyznaczamy ceny opcji put przy nowej wartości zmiennej implikowanej. Dla zobowiązania, podstawiając:

$$r = 0.03, \sigma = 0.25, K = 100, T = 10, S(0) = 100,$$

dostajemy cenę opcji $= 15.58$. Dla instrumentu zabezpieczającego zobowiązanie, podstawiając:

$$r = 0.03, \sigma = 0.25, K = 100, T = 5, S(0) = 100,$$

dostajemy cenę opcji $= 14.23$. Wartość zakupionych instrumentów bazowych i rachunku bankowego nie zmieniła się w tym scenariuszu.

Wzrost zobowiązań: $15.58 - 10.93 = 4.65$

Wzrost aktywów: $1.21\,(14.23 - 10.39) = 4.6464$

Strata = zobowiązania − aktywa ≈ 0.02

c) Strategia *vega hedging* pozwala zabezpieczyć zobowiązanie przy małych zmianach zmienności implikowanej.

Zadanie 5.

Rozważamy ryzyko składki i ryzyko rezerw w reżimie Wypłacalność II w segmencie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej z tytułu użytkowania pojazdów mechanicznych (segment 1) oraz w segmencie ubezpieczenia od ognia i innych szkód rzeczowych (segment 4). Miary wielkości ryzyka składki wynoszą, odpowiednio, 400 i 600, odchylenia standardowe ryzyka składki wynoszą 10% i 8%, miary wielkości ryzyka rezerw wynoszą 400 i 500, odchylenia standardowe ryzyka rezerw wynoszą 9% i 10%, współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem składki i ryzykiem rezerw wynosi 0.5, współczynnik korelacji pomiędzy segmentami wynosi 0.25.

a) Stosujemy agregację hierarchiczną zgodnie z Formułą Standardową. Na pierwszym poziomie agregujemy ryzyko składki z ryzykiem rezerw dla każdego segmentu oddzielnie, na kolejnym poziomie agregujemy łączne ryzyko składki i rezerw pomiędzy dwoma segmentami. Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i ryzyka rezerw dla obu segmentów łącznie (zdywersyfikowany kapitał) zgodnie z Formułą Standardową (3p).

b) Aktuariusz postanowił wdrożyć model wewnętrzny i agregować ryzyka strat stosując kopułę Gaussa jako model zależności. Aktuariusz zrezygnował z agregacji hierarchicznej i rozważa łączną agregację czterech strat pochodzących z ryzyka składki w segmencie 1, ryzyka rezerw w segmencie 1, ryzyka składki w segmencie 2 i ryzyka rezerw w segmencie 2. Podaj postać macierzy korelacji i wskaż współczynniki korelacji, które dodatkowo należy oszacować w celu zastosowania tego podejścia (2p).

a) $SCR_p = 3 \cdot \sqrt{(E_{p,1} \cdot \sigma_{p,1})^2 + (E_{p,r} \cdot \sigma_{p,r})^2 + 2 \cdot E_{p,1} \cdot \sigma_{p,1} \cdot E_{p,r} \cdot \sigma_{p,r} \cdot \rho_{1,r}}$

$SCR_{total} = \sqrt{SCR_1^2 + SCR_2^2 + 2 SCR_1 \cdot SCR_2 \cdot \rho_{p_1,p_2}}$

$SCR_1 = 3 \cdot \sqrt{(400 \cdot 0.1)^2 + (400 \cdot 0.09)^2 + 2 \cdot 400 \cdot 0.1 \cdot 400 \cdot 0.09 \cdot 0.5} = 197.55$

$SCR_2 = 3 \cdot \sqrt{(600 \cdot 0.08)^2 + (500 \cdot 0.1)^2 + 2 \cdot 600 \cdot 0.08 \cdot 500 \cdot 0.1 \cdot 0.5} = 254.63$

$SCR = \sqrt{197.55^2 + 254.63^2 + 2 \cdot 197.55 \cdot 254.63 \cdot 0.25} = 359.18$

b) Rozważamy wielowymiarowy rozkład $(X_1^S, X_1^R, X_2^S, X_2^R)$, gdzie X_i^S oznacza stratę w segmencie i związaną z ryzykiem składki, X_i^R oznacza stratę w segmencie i związaną z ryzykiem rezerw. Macierz korelacji dla wektora $(X_1^S, X_1^R, X_2^S, X_2^R)$ jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & ? & ? \\ 0.5 & 1 & ? & ? \\ ? & ? & 1 & 0.5 \\ ? & ? & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie znakami ? oznaczono współczynniki korelacji, które należy dodatkowo wyznaczyć.

Zadanie 6.

Rozważamy spółkę, która posiada dwie linie biznesowe A i B. Zakładamy, że straty w liniach biznesowych A i B mają łączny rozkład normalny o brzegowych wartościach oczekiwanych równych zero oraz odchyleniach standardowych 70 i 100. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy stratami w liniach A i B wynosi 0.25. Kapitał ekonomiczny wyznaczamy stosując miarę *Conditional Tail Expectation* na poziomie 95%.

a) Wyznacz kapitał ekonomiczny na poziomie każdej linii biznesowej (2p).

b) Wyznacz zdywersyfikowany kapitał ekonomiczny poziomie spółki (1p).

c) Wyznacz alokację zdywersyfikowanego kapitału ekonomicznego do poziomu linii biznesowych stosując alokację Eulera (2p).

Wskazówka 1: Jeżeli $X \sim N(a, b^2)$, wtedy $CTE_p(X) = a + b\frac{f(F^{-1}(p))}{1-p}$, gdzie f i F są gęstością i dystrybuantą rozkłady $N(0,1)$, w szczególności:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Wskazówka 2: Rozważmy miarę ryzyka RC równą odchyleniu standardowemu. W sytuacji dwóch linii, wyznaczamy alokację zgodnie z metodą Eulera:

$$RC(L_1|L_1+L_2) = \frac{\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\rho}}.$$

a) Korzystając ze wskazówki 1:

$X_A \sim N(0, 70^2)$ $\quad$ $X_B \sim N(0, 100^2)$

$$CTE_{0.95}(X_A) = 0 + 70\frac{f(F^{-1}(0.95))}{1-0.95} = 70 \cdot \frac{f(1.6449)}{0.05} = 70 \cdot \frac{0.1031}{0.05}$$

$$CTE_{0.95}(X_A) = 2.0627 \cdot 70 = 144.39$$

$$CTE_{0.95}(X_B) = 2.0627 \cdot 100 = 206.27$$

b) Łączna strata w obu liniach ma rozkład normalny o wariancji

$$70^2 + 100^2 + 2 \cdot 70 \cdot 100 \cdot 0.25 = 135.64^2$$

$$CTE_{0.95}(X) = 2.0627 \cdot 135.64 = 279.80$$

c) Korzystając ze wskazówki 2:

Ponieważ miara CTE jest proporcjonalna do odchylenia standardowego, wyznaczamy alokację zdywersyfikowanego kapitału do linii pierwszej stosując wzór:

$$RC(L_1|L) = 2.06 \cdot \frac{cov(L_1, L_1+L_2)}{SD(L_1+L_2)} = \frac{70^2 + 70 \cdot 100 \cdot 0.25}{\sqrt{70^2+100^2+2 \cdot 70 \cdot 100 \cdot 0.25}} = 101.12$$

Alokacja do linii drugiej wynosi:

$$RC(L_2|L) = 2.06 \cdot \frac{cov(L_2, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = \frac{100^2 + 70 \cdot 100 \cdot 0.25}{\sqrt{70^2 + 100^2 + 2 * 70 \cdot 100 \cdot 0.25}} = 178.68$$

Zadanie 7.

W kontekście jednorocznego ryzyka składki w reżimie Wypłacalność II, przyjęto i udokumentowano następujące założenia spełnione w poprzednich latach szkody:

- oczekiwane zagregowane szkody S w danym segmencie i danym roku szkody są liniowo proporcjonalne do składek zarobionych P w danym roku szkody:
$$E[S|P = p] = \beta \cdot p,$$
- wariancja zagregowanych szkód S w danym segmencie i danym roku szkody jest kwadratowa do składek zarobionych w danym roku szkody,
$$Var[S|P = p] = \sigma^2 \cdot p^2,$$
- zagregowane szkody S pochodzą z rozkładu logarytmiczno-normalnego.

Składka zarobiona w roku 2025 wyniesie 100 PLN. Aktuariusz oszacowała parametry $\beta = 0.8$ oraz $\sigma = 0.15$.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki w reżimie Wypłacalność II zgodnie z powyższym modelem stosując miarę *Value-at-Risk* na poziomie 99.5% (3p).

b) Ponieważ estymację parametrów modelu przeprowadzono na potrzeby wyznaczenia jednorocznego ryzyka składki, wyjaśnij jak należy rozumieć „zagregowane szkody" w tym kontekście (2p).

Wskazówka: Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak+\frac{1}{2}b^2k^2}$.

a) Wyznaczamy momenty:

$$E[S|P=100] = \beta \cdot p = 0.8 \cdot 100 = 80$$

$$Var[S|P=100] = \sigma^2 \cdot p^2 = 0.15^2 \cdot 100^2 = 225$$

Niech $X = (S|P=100) = e^{a+bZ}$, gdzie $Z \sim N(0,1)$. Korzystając z metody momentów:

$$\begin{cases} 80 = EX = \exp\{a + \frac{1}{2}b^2\} \\ 225 + 80^2 = EX^2 = \exp\{2a + \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot b^2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \ln(80) - \frac{1}{2}b^2 \\ \exp\{2[\ln(80) - \frac{1}{2}b^2] + 2b^2\} = 225 + 80^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0.1858 \\ a = 4.3647 \end{cases}$$

$$SCR = VaR_p(X) - E[X]$$

$$VaR_{0.995}(X) = \exp\{4.3647 + 0.1858 \cdot \Phi^{-1}(0.995)\} = 126.89$$

$$SCR = 126.89 - 80 = 46.92$$

b) Zagregowane szkody w kontekście ryzyka jednorocznego rozumiemy jako dokonane płatności i najlepsze oszacowania rezerw na roszczenia zaległe po pierwszym roku zmiany dotyczącym roku szkody dla tych płatności.

Zadanie 8.

Rozważamy jednoroczne ubezpieczenie z funduszem kapitałowym ze składką jednorazową i świadczeniami związanymi ze śmiercią i dożyciem końca trwania umowy. W momencie t=0 ubezpieczony wpłaca składkę w wysokość 100 PLN i ubezpieczyciel pobiera opłatę w wysokości 100*x% PLN w celu zabezpieczenia zobowiązania. Następnie, składka w wysokości 100*(1-x%) PLN wpłacana jest na fundusz, którego dynamika opisana jest geometrycznym ruchem Browna zgodnie ze wzorem:

$$dS(t) = aS(t)dt + bS(t)dW(t),$$

gdzie $a = 10\%$, $b = 15\%$. Zwroty z funduszu determinują wartość rachunku w ubezpieczeniu. Jeżeli ubezpieczony przeżyje, ubezpieczyciel wypłaca w momencie t=1, ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub 103% składki wpłaconej na fundusz (składki po potrąceniu wstępnej opłaty). Jeżeli ubezpieczony umrze, świadczenie w wyniku śmierci płatne w momencie t=1 wyniesie 110% wartości rachunku. Prawdopodobieństwo zgonu wynosi 1% rocznie zgodnie z najlepszym oszacowaniem aktuariusza. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% w okresie rocznym. Ryzyko śmiertelności jest niezależne od ryzyka finansowego i jest w pełni dywersyfikowalne w portfelu. Opcje kwotowane na rynku finansowym wyceniane są zgodnie z modelem Blacka-Scholesa. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka, obligacje wolne od ryzyka o dowolnym terminie wykupu oraz fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

a) Ubezpieczyciel zabezpiecza swoje zobowiązanie poprzez replikację. Wyznacz wartość x, przy której pobrana opłata pozwoli na replikację gwarancji w wyniku dożycia i sumy na ryzyku w wyniku śmierci w rozważanym teoretycznym modelu rynku finansowego i ubezpieczeniowego (2p).

b) Wyznacz strategię *delta* hedging replikującą zobowiązanie w rozważanym teoretycznym modelu rynku finansowego i ubezpieczeniowego (2p).

c) W sytuacji, gdy replikacja nie byłaby możliwa, zaproponuj metodę aktuarialną wyznaczenia wartości x (1p).

Wskazówka: Wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$\textit{Cena opcji put} = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$\textit{Delta opcji put} = -N(-d_1),$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

a) Klient wpłaca jednorazowo 100 zł. Ubezpieczyciel natychmiast potrąca z tego prowizję w wysokości x %.

- Pobierana opłata: 100x
- Pieniądze pracujące w funduszu: $F(0) = 100(1-x)$

Fundusz ten inwestowany jest na giełdzie, a jego zachowanie opisuje zmienna $S(t)$. Dla ułatwienia $S(0) = 1$.

Wartość rachunku klienta w dowolnym momencie T to po prostu liczba kupionych jednostek razy ich aktualna cena: $F(T) = F(0) \cdot S(T)$

Ubezpieczyciel musi wycenić dwa ryzyka, które na siebie bierze:

(Pobrana opłata) = (Koszt gwarancji na dożycie) + (Koszt dodatkowego świadczenia na wypadek śmierci)

1. Wycena gwarancji na dożycie (opcja put)

Jeśli klient dożyje do końca umowy ($p = 99\%$), dostaje wyższą z dwóch kwot: wartość rachunku $F(T)$ albo 103% wpłaconej składki netto: $\max\{F(0) \cdot 1.03, F(T)\}$.

Stosując trik można zapisać powyższe max jako:

$$\text{Świadczenie} = F(T) + \max\{F(0) \cdot 1.03 - F(T),\ F(T) - F(T)\} =$$
$$= F(T) + \max\{F(0) \cdot 1.03 - F(0)S(T),\ 0\} =$$
$$= F(T) + F(0)\max\{1.03 - S(T),\ 0\}$$

Ubezpieczyciel musi dołożyć $F(0)\max\{1.03 - S(T), 0\}$.

$\max\{1.03 - S(T), 0\}$ to wypłata opcji put z ceną wykonania $K = 1.03$.

Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa z parametrami:

$e^r = 1.02$

$r = \ln(1.02)$ $\quad \sigma = 0.15$ $\quad T = 1$ $\quad K = 1.03$ $\quad S(0) = 1$

wartość opcji put jest równa 0.0651.

2. Wycena świadczenia na wypadek zgonu.

Jeśli klient umrze ($q = 0.01$), dostaje 110% wartości rachunku:

$$\text{Świadczenie} = 1.1 \cdot F(T) = F(T) + 0.1F(T) = F(T) + 0.1(1-x)100$$

W wypadku śmierci ubezpieczyciel musi dołożyć klientowi dodatkowe 10% z własnej kieszeni, musi zatem kupić dodatkowe 0.1 jednostek funduszu $S(t)$. Koszt zakupu jednostki S w $t=0$ wynosi $S(0)=1$.

3. Ponieważ ryzyko śmiertelności jest niezależne od ryzyka finansowego i jest dywersyfikowalne w portfelu, możemy interpretować świadczenie jako wypłatę z $(1-x)\cdot 100\cdot 0.99$ jednostek opcji put oraz $(1-x)\cdot 100\cdot 0.1\cdot 0.01$ jednostek akcji S (uwzględniamy prawdopodobieństwo). Pobrana opłata ma równać się sumie powyższych:

$100x = (1-x)\cdot 100\cdot 0.99\cdot 0.0651 + (1-x)\cdot 100\cdot 0.01\cdot 0.1\cdot 1$

$x = (1-x)(0.99\cdot 0.0651 + 0.01\cdot 0.1)$

$x = 6.14\%$.

Gwarancję związaną z dożyciem i sumę na ryzyku związaną ze zgonem możemy zapisać jako:

$$
\begin{aligned}
H &= \mathrm{N} * \max(F(0) * (1+g) - F(T); 0) + (n-N) * h * F(T) \\
&= \mathrm{N} * \max(F(0) * (1+g) - F(0) * S(T), 0) + (n-N) * h * F(0) * S(T) \\
&= (1-x) * Składka * N * \max(1+g-S(T), 0) \\
&\quad + (1-x) * Składka * (n-N) * h * S(T),
\end{aligned}
$$

gdzie g oznacza gwarantowaną stopę zwrotu w okresie ubezpieczenia związaną z dożyciem, h – sumę na ryzyku, jako procent wartości rachunku, związaną ze zgonem w okresie ubezpieczenia, n – liczbę ubezpieczonych w portfelu i N - losową liczbę osób dożywających końca umowy.

b) Wiemy, że wypłata z opcji put związana z dożyciem może być replikowana dynamicznie strategią delta-hedgingową na rynku zupełnym typu Blacka-Scholesa. Rynek w naszym zadaniu jest zupełny ponieważ zakładamy, że ryzyko śmiertelności jest dywersyfikowalne. Dodatkowo, musimy posiadać akcje zabezpieczające sumę na ryzyku w wyniku zgonu.

$\hat{N}$ - oczekiwana liczba osób dożywających do końca umowy

„Delta" mówi nam, ile jednostek instrumentu bazowego (fundusz S) musimy kupić lub sprzedać na każdą wystawioną opcję / zobowiązanie.

Wzór na Deltę opcji put to $-N(-d_{1,t})$

Mamy $\hat{N}$ osób dożywających, każda ma ulokowany kapitał warty początkowo $(1-x)\cdot$ Składka aby zabezpieczyć tę część portfela należy zająć pozycję:

$- N(-d_{1,t}) \cdot (1-x) \cdot Składka \cdot \hat{N}$

Delta samego funduszu S wynosi 1 dlatego druga część zabezpieczenia to: $h(1-x) \cdot Składka \cdot (n - \hat{N})$

Liczba akcji funduszu S, którą powinien posiadać ubezpieczyciel w chwili $t \in [0, T]$ w portfelu replikującym, jest więc dana wzorem:

$$-N(-d_{1,t}) * (1-x) * Składka * \hat{N} + h * (1-x) * Składka * (n - \hat{N}),$$

gdzie

$$d_{1,t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\log\left(\frac{S(t)}{1+g}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right).$$

Reszta środków powinna być zainwestowana w rachunek wolny od ryzyka. Z punktu a) wiemy, że pobrana opłata sfinansuje cenę początkową zakupu portfela replikującego.

c) Alternatywnie, możemy zastosować aktuarialne podejście do wyceny i wyznaczyć opłatę x, przy warunku, że strata związana z zabezpieczeniem świadczenia zrealizuje się z odpowiednim małym prawdopodobieństwem.

Zadanie 9.

W modelu wewnętrznym rozważamy straty z dwóch linii biznesowych. Zależność pomiędzy stratami opisana jest kopułą Gumbela:

$$C(u,v) = \exp\{-((-\ln(u))^a + (-\ln(v))^a)^{1/a}\},$$

z parametrem a. Rozważamy scenariusz, w którym straty w obu liniach przekroczą jednocześnie kwantyle rzędu 99% swoich rozkładów brzegowych. Zakładamy ciągłe rozkłady brzegowe.

a) Wyznacz prawdopodobieństwo scenariusza przy założeniu $a = 2$ (2p).

b) Wyznacz prawdopodobieństwo scenariusza przy założeniu, że straty są niezależne. Uzasadnij jaka wartość a w kopule Gumbela odpowiada tej strukturze zależności (2p).

c) Scharakteryzuj zależność w ogonach dla kopuły Gumbela i wyjaśnij znaczenie zależności w ogonie w zarządzaniu ryzykiem (1p).

a) Zachodzi:

$$P(L_1 > F_1^{-1}(p), L_2 > F_2^{-1}(p)) = P(F_1(L_1) > p, F_2(L_2) > p) =$$

$$= 1 - P(F_1(L_1) \leq p) - P(F_2(L_2) \leq p) + P(F_1(L_1) \leq p, F_2(L_2) \leq p) =$$

= | zm. los. zdefiniowana jako dystrybuanta własnego rozkładu ma rozkład $U(0,1)$ | =

$$= 1 - P(V_1 \leq p) - P(V_2 \leq p) + P(V_1 \leq p, V_2 \leq p) = 1 - 2p + C(p,p) =$$

$$= 1 - 2 \cdot 0.99 + \exp\{-[(-\ln(0.99))^2 + (-\ln(0.99))^2]^{\frac{1}{2}}\} =$$

$$= 0.0058$$

b) Gdy zm. los. są niezależne to:

$$P(L_1 > F_1^{-1}(p), L_2 > F_2^{-1}(p)) = P(F_1(L_1) > p, F_2(L_2) > p) =$$

$$= P(V_1 > p, V_2 > p) = P(V_1 > p) \cdot P(V_2 > p) =$$

$$= 0.01 \cdot 0.01 = 0.0001$$

Dla $a = 1$:

$$C(u,v) = \exp\{-[-\ln(u) - \ln(v)]\} = \exp\{\ln(u) + \ln(v)\} =$$

$$= \exp\{\ln(u \cdot v)\} = u \cdot v$$

Przy $a = 1$ kopuła Gumbela redukuje się do kopuły niezależności.

c) Kopula Gumbela ma zależność w górnym ogonie. Zależność w górnym ogonie charakteryzuje zależność pomiędzy skrajanymi zdarzeniami.

Zadanie 10.

Firma posiada następujący program reasekuracji nieproporcjonalnej: reasekurację nadwyżki szkody 10MLN xs 3MLN, z zachowkiem 3 mln PLN i górnym limitem odpowiedzialności reasekuratora 10 mln PLN. Reasekuracja stosowana jest do nadwyżki szkody liczonej w stosunku do każdego zdarzenia. Program reasekuracji posiada nieskończenie wiele wznowień.

a) Do wyceny programu reasekuracji nieproporcjonalnej stosujemy krzywą *exposure curve* postaci:

$$r(x) = \frac{1 - b^x}{1 - b}, \quad x \in [0,1].$$

Przyjmujemy $b = 0.5$. Wyznacz wartość oczekiwaną szkody z kontraktu 10MLN xs 3MLN jeżeli szkoda maksymalna dla zdarzenia *probable maximum loss* wynosi 50MLN. Przyjmij jednostkową wartość oczekiwaną szkody brutto (3p).

b) Wyznacz dystrybuantę znormalizowanej szkody odpowiadającą powyższej krzywej *exposure curve* (2p).

Wskazówka: Krzywa *exposure curve* jest zdefiniowana dla złożonej zmiennej $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$:

$$r(x) = \frac{E[\sum_{i=1}^{N} \min(X_i\,;\, x \cdot M)]}{E[\sum_{i=1}^{N} X_i]} = \frac{E[\min(X_i\,;\, x \cdot M)]}{E[X]}$$

$$= \frac{= \int_0^x (1 - F_{\frac{X}{M}}(u))du}{\int_0^1 (1 - F_{\frac{X}{M}}(u))du}, \quad x \in [0,1],$$

gdzie M oznacza *probable maximum loss* i zmienna $\frac{X}{M}$ oznacza znormalizowaną szkodę.

Zachowek $U = 3$ mln

Limit odpowiedzialności reasekuratora $L = 10$ mln

Reasekurator pokrywa tę część szkody X, która przekracza 3 mln, ale wypłata nie może być większa niż 10 mln. Reasekurator odpowiada za szkody od 3 do 13 mln.

Wypłatę reasekuratora Y dla pojedynczej szkody X można zapisać jako:

$Y = \min(X, U + L) - \min(X, U)$

Korzystając ze wskazówki mamy:

$E[\min(X, d)] = r(\frac{d}{M}) \cdot E[X]$, gdzie $d = x \cdot M$

a) $E[\min(X, V+L)] - E[\min(X,V)] =$

$$= E[X] \cdot \left[r\left(\frac{V+L}{M}\right) - r\left(\frac{V}{M}\right)\right] =$$

$$= 1 \cdot \left[r\left(\frac{13}{50}\right) - r\left(\frac{3}{50}\right)\right] = 2\left[1 - 0.5^{\frac{13}{50}} - 1 + 0.5^{\frac{3}{50}}\right] =$$

$$= 0.2484$$

b) Wykorzystując wskazówkę dla zmiennej $Y = X/M$:

$$r(x) = \frac{\int_0^x (1 - F_Y(u))\,du}{\int_0^1 (1 - F_Y(u))\,du} \quad \Big/ \, (\,)'$$

$$r'(x) = \frac{1 - F_Y(x)}{E[Y]}$$

$$r'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-b^x}{1-b}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-b} - \frac{b^x}{1-b}\right)$$

$$(b^x)' = \left(e^{\ln b^x}\right)' = \left(e^{x \ln b}\right)' = e^{x \ln b} \cdot \ln(b) = b^x \ln(b)$$

$$r'(x) = \frac{-b^x \ln(b)}{1-b}$$

$$1 - F_Y(x) = E[Y] \frac{-b^x \ln(b)}{1-b}$$

Dla szkody niemożliwe są wartości ujemne stąd $F_Y(0) = 0$:

$$1 - F_Y(0) = 1 = E[Y] \frac{-b^0 \ln(b)}{1-b}$$

$$E[Y] = \frac{1-b}{-\ln(b)}$$

$$1 - F_Y(x) = \frac{1-b}{-\ln(b)} \cdot \frac{-b^x \ln(b)}{1-b} = b^x$$

$$F_Y(x) = 1 - b^x, \quad x \in [0,1]$$