Zadanie 1.

Dysponujesz następującymi danymi dla spółki (w ujęciu rocznym) działającej w sektorze X:

Współczynnik beta dla akcji spółki	1.5
Stopa zwrotu z portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki	5%
Stopa wolna od ryzyka dla obligacji rządowych	3%

Stosunek kapitału pozyskanego w drodze emisji akcji i obligacji wynosi 1:3 (zgodnie z wartościami rynkowymi). Spółka wyceniana jest jako firma wolna od ryzyka kredytowego, co znajduje odzwierciedlenie w koszcie spłaty zobowiązań z wyemitowanych obligacji. Pomijamy podatki.

a) Wyznacz koszt kapitału (WACC) dla spółki jako ważony koszt emisji akcji i obligacji. Do wyznaczenia kosztu akcji zastosuj model CAPM (2p).

b) Przy zadanej strukturze finansowania i aktualnym poziomie ryzyka działalności, oblicz czy spółka powinna realizować nowy projekt inwestycyjny w sektorze X, wiedząc, że spodziewane wpływy są równe 200, 200, 200 w kolejnych trzech latach (przychody na koniec roku) w zamian za zainwestowanie 500 (jednorazowy koszt na początku pierwszego roku) (2p).

c) Wyjaśnij, czy stopa dyskonta zastosowana w punkcie b) byłaby taka sama, gdyby spółka postanowiła realizować nowy projekt inwestycyjny w bardziej ryzykownym sektorze Y (1p).

a) Koszt emisji obligacji = 3%

Koszt emisji akcji zgodnie z modelem CAPM:

$R_c = R_f + \beta(R_m - R_f)$ $\quad$ R_c – oczekiwana stopa zwrotu z akcji

R_f – stopa wolna od ryzyka

β – współczynnik beta

R_m – rynkowa stopa zwrotu

$R_c = 3\% + 1.5(5\% - 3\%) = 6\%$

$WACC = W_c \cdot R_c + W_d \cdot K_d$ $\quad$ W_c – waga akcji

W_d – waga obligacji

K_d – koszt emisji obligacji

Stosunek akcji do obligacji wynosi 1:3 stąd:

$W_c = \frac{1}{4}$ $\quad$ $W_d = \frac{3}{4}$

$WACC = \frac{1}{4} \cdot 6\% + \frac{3}{4} \cdot 3\% = 3.75\%$

b) Zdyskontowana wartość przepływów przy stopie WACC wynosi

$$-500 + \frac{200}{1+3.75\%} + \frac{200}{(1+3.75\%)^2} + \frac{200}{(1+3.75\%)^3} = 57.66.$$

Spółka powinna realizować nowy projekt inwestycyjny.

c) Koszt emisji akcji najprawdopodobniej zmieni się. Spodziewamy się, że premia za ryzyko dla akcji będzie wyższa dla spółki, która podejmie się realizacji bardziej ryzykownego przedsięwzięcia - akcjonariusze domagać się będą odpowiednio wyższej stopy zwrotu z zainwestowanego kapitału.

Zadanie 2.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie, które ma postać opcji put na indeks bazowy z ceną wykonania 100 i terminem wykonania 5 lat. Wartość zobowiązania wyceniana jest zgodnie z modelem Blacka-Scholesa przy aktualnych wartościach parametrów stopy procentowej, zmienności i ceny indeksu bazowego. Aktualna cena indeksu bazowego wynosi 100, aktualna zmienność indeksu bazowego wynosi 10%. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i aktualna stopa wolna od ryzyka wynosi 3% (oprocentowanie ciągłe).

a) Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu ze względu na zmianę stopy procentowej Δr i ceny indeksu bazowego Δs, wyznacz kapitał ekonomiczny zabezpieczający wzrost wartości zobowiązania w ciągu 10 dni, przy założeniu, że zmiana czynników ryzyka w ciągu 10 dni ma rozkład:

$$\begin{bmatrix}\Delta r\\ \Delta s\end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\left(\frac{0.4}{100}\right)^2 & \frac{0.4}{100}*\frac{2}{100}*0.5\\ \frac{0.4}{100}*\frac{2}{100}*0.5 & \left(\frac{2}{100}\right)^2\end{bmatrix}\right).$$

Do wyznaczenia kapitału ekonomicznego wykorzystaj miarę Expected Shortfall na poziomie 95% (3p).

b) Wyznacz poziom ufności dla miary Value-at-Risk, przy której dostaniemy ten sam kapitał ekonomiczny mierzony VaR co powyżej (2p).

<u>Wskazówka</u>: Wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$Cena\ opcji\ put = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$

$$Delta\ opcji\ put = -N(-d_1), \qquad Rho\ opcji\ put = -N(-d_2)KTe^{-rT}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

<u>Wskazówka</u>: Jeżeli $X \sim N(a, b^2)$, wtedy $CTE_p(X) = a + b\frac{f(F^{-1}(p))}{1-p}$, gdzie f i F są gęstością i dystrybuantą rozkłady $N(0,1)$, w szczególności:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

a) Niech $V(r,s)$ oznacza wartość zobowiązania przy bieżącej stopie procentowej i cenie indeksu bazowego. Stosując aproksymację Taylora wyznaczamy zmianę wartości zobowiązania przy zmianie stopy procentowej i ceny indeksu bazowego $(\Delta r, \Delta s)$. Dostajemy

$$V(r+\Delta r, s+\Delta s) - V(r,s) = V_r(r,s)\Delta r + V_s(r,s)\Delta s,$$

- V_r to pochodna ceny opcji względem stopy procentowej, jest to rho opcji put
- V_s to pochodna ceny opcji względem ceny instrumentu bazowego, jest to delta opcji put

$S = 100 \quad K = 100 \quad \sigma = 0.1 \quad r = 0.03 \quad T = 5$

$rho = -N(d_2)\cdot 100 \cdot 5 \cdot e^{-0.03\cdot 5} = -123.97$

$$\text{delta} = -N(-d_1) = -0.21$$

Przyjmując założenie o łącznym rozkładzie normalnym dla 10-dniowej zmiany stopy procentowej Δr i ceny indeksu bazowego Δs, dostajemy rozkład zmiany wartości zobowiązania:

$$\Delta V = V(r+\Delta r,\ s+\Delta s) - V(r, s) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Var(\Delta V) = V_r^2\, Var(\Delta r) + V_s^2\, Var(\Delta s) + 2V_r \cdot V_s \cdot Cov(\Delta r, \Delta s)$$

$$Var(\Delta V) = (-123.97)^2 \cdot \left(\frac{0.4}{100}\right)^2 + (-0.21)^2 \cdot \left(\frac{2}{100}\right)^2 + 2(-123.97)(-0.21) \cdot \frac{0.4}{100} \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{100} \cdot 0.5 = 0.248 = 0.4981^2$$

$$\Delta V \sim N(0;\ 0.4981^2)$$

$$CTE_{0.95}(\Delta V) = 0 + 0.4981 \cdot \frac{f(F^{-1}(0.95))}{1-0.95} = 1.0274$$

b) Chcemy znaleźć taki poziom ufności q, aby miara VaR dała dokładnie ten sam wynik co miara CTE. Czyli $VaR_q = 1.0274$

$$VaR_q(X) = \mu + \sigma F^{-1}(q)$$

$$0.4981 \cdot F^{-1}(q) = 1.0274$$

$$F^{-1}(q) = \frac{1.0274}{0.4981} \quad | \, F()$$

$$q = F(2.0626)$$

$$q = 0.9804$$

Zadanie 3.

Rozważamy jednoroczne ubezpieczenie z funduszem kapitałowym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związaną z dożyciem końca trwania umowy. Zakładamy, że ubezpieczony dożywa końca trwania umowy i pomijamy ryzyko śmiertelności w tym przykładzie. W momencie t=0 ubezpieczony wpłaca składkę w wysokości 100 PLN. Następnie, w momencie t=0 ubezpieczyciel pobiera opłatę w wysokości 5% wpłaconej składki, w celu zabezpieczenia gwarancji minimalnego świadczenia. Składka w wysokości 100*(1-5%)=95 PLN jest lokowana w fundusz inwestycyjny i wartość inwestycji tworzy wartość rachunku ubezpieczonego. W momencie końca trwania, w chwili t=1, umowy ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub 103% składki wpłaconej na fundusz (składki po potrąceniu wstępnej opłaty).

W oparciu o analizy historyczne, roczne stopy zwrotu z funduszu modelujemy rozkładem lognormalnym, przy założeniu, że logarytm rocznej stopy zwrotu ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0.1 i odchyleniu standardowym 0.05. W oparciu o dane rynkowe, zmienności implikowane w modelu Blacka-Scholesa dla funduszu inwestycyjnego dla opcji put na fundusz wynoszą:

Termin zapadalności	Zmienność implikowana
0.5 roku	0.055
1 rok	0.06
2 lata	0.065

Pomijamy podatki i pozostałe koszty działalności ubezpieczeniowej. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowy. Na rynku dostępny jest rachunek bankowy o stopie zwrotu 5% w okresie rocznym

a) Wyznacz wartość gwarancji stosując model Blacka-Scholesa i oceń, czy pobrana opłata jest wystarczająca do pełnej replikacji gwarancji w sytuacji, gdy ubezpieczyciel może dynamicznie konstruować portfel replikujący inwestując w fundusz i rachunek bankowy (2p).

b) Stosując miarę Value-at-Risk na poziomie 95% wyznacz wartość środków potrzebnych do zabezpieczenia straty z powyżej gwarancji w sytuacji, gdy ubezpieczyciel nie może dynamicznie konstruować portfela replikującego inwestując w fundusz i rachunek bankowy i inwestuje wyłącznie w rachunek bankowy (3p).

<u>Wskazówka:</u> Wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$\mathit{Cena\ opcji\ put} = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

<u>Wskazówka:</u> Zmienna o rozkładzie lognormalnym spełnia $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$.

a) • Składka to 100 zł

• Opłata początkowa (x) to 5%, czyli 5 zł

• Na fundusz trafia $F(0) = 100 \cdot (1-5) = 95$ zł

• Wartość funduszu w momencie T to liczba kupionych jednostek razy ich aktualna cena: $F(T) = F(0) \cdot S(T)$, dla ułatwienia $S(0) = 1$

- Klient otrzyma wyższą z dwóch kwot: wartość rachunku $F(T)$ lub 103% wpłaconej składki netto:

$$\text{Świadczenie} = \max\{F(0)\cdot 1.03,\ F(T)\} = F(T) + \max\{F(0)\cdot 1.03 - F(T),\ 0\} =$$
$$= F(T) + \max\{1.03F(0) - S(T)F(0),\ 0\} =$$
$$= F(T) + F(0)\underbrace{\max\{1.03 - S(T),\ 0\}}_{\text{wypłata opcji put z ceną wykonania } K=1.03}$$

Koszt gwarancji to:

$$H = F(0)\max\{1.03 - S(T),\ 0\}$$

Wycena opcji put:

$S(0)=1 \qquad K=1.03 \qquad T=1$

$r=0.06$ wartość z tabeli dla 1 roku

$e^{r} = 1.05 \Rightarrow r = \ln(1.05)$

Po podstawieniu do wzorów cena opcji put to 0.0154.

Koszt gwarancji $H = 95\cdot 0.0154 = 1.463$

Pobrana opłata jest większa niż koszt gwarancji jest więc wystarczająca do pełnej replikacji gwarancji w modelu Blacka-Scholesa ponieważ jest wystarczająca do stworzenia dynamicznego portfela replikującego wypłatę z gwarancji.

b) Współczynnik zwrotu S to zmienna o rozkładzie log-normalnym:

$S = e^{a+bX}$, gdzie $a=0.1$, $b=0.05$, $X\sim N(0,1)$.

Ubezpieczyciel ponosi stratę tylko wtedy, gdy gwarancja zadziała, czyli $S<1.03$.

$$P(S<1.03) = P(e^{a+bX}<1.03) = P(a+bX<\ln(1.03)) =$$
$$= P\left(X<\frac{\ln(1.03)-a}{b}\right) = P\left(X<\frac{\ln(1.03)-0.1}{0.05}\right) = 0.0794$$

Skoro szukamy najgorszych 5% przypadków $VaR_{0.95}$ a p-stwo straty to prawie 8% mamy pewność, że kwantyl 5% wpadnie w strefę, gdzie ponosimy stratę.

Strata $H = 95(1.03 - S)$, szukamy $VaR_{0.95}(H)$ czyli takiej straty, która zostanie przekroczona tylko w 5% najgorszych scenariuszy.

$$VaR_{0.95}(H) = 95(1.03 - VaR_{0.05}(S)) =$$

$$= 95(1.03 - e^{a + b \cdot \Phi^{-1}(0.05)}) = 1.1480$$

Do znalezienia 5% najgorszych wyników potrzebujemy kwantyla rozkładu standardowego rzędu 0.05 czyli $\Phi^{-1}(0.05) = -1.64485$

Na koniec trzeba zdyskontować:

$$\frac{1.148}{1.05} = 1.0933$$

Zadanie 4.

W kontekście jednorocznego ryzyka składki w reżimie Wypłacalność II przyjęto i udokumentowano następujące założenia:

- oczekiwane zagregowane szkody S w danym segmencie i danym roku szkody są liniowo proporcjonalne do składek zarobionych P w danym roku szkody:
$$E[S|P = p] = \beta \cdot p,$$
- wariancja zagregowanych szkód S w danym segmencie i danym roku szkody jest kwadratowa do składek zarobionych w danym roku szkody,
$$Var[S|P = p] = \sigma^2 \cdot p^2$$
- zagregowane szkody S pochodzą z rozkładu logarytmiczno-normalnego.

Składka zarobiona w roku 2024 wyniesie 100 PLN. Aktuariusz oszacowała parametry $\beta = 0.7$ oraz $\sigma = 0.1$.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki zgodnie z powyższym modelem (3p).

b) Aktuariusz dokonując estymacji parametrów skorygował historyczne dane o roszczenia z tytułu katastrof. Oceń, czy takie podejście jest dopuszczalne w ramach estymacji parametrów specyficznych (1p).

c) Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki zgodnie z Formułą Standardową i modelem czynnikowym opartym o składkę zarobioną (1p).

<u>Wskazówka:</u> Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak+\frac{1}{2}b^2k^2}$.

a) Wyznaczamy:

$E[S|P=100] = \beta \cdot p = 0.7 \cdot 100 = 70$

$Var[S|P=100] = \sigma^2 \cdot p^2 = 0.1^2 \cdot 100^2 = 100$

$(S|P=100) = e^{a+bZ}$, gdzie $Z \sim N(0,1)$. Korzystając z metody momentów

$$\begin{cases} 70 = \exp\{a + \frac{1}{2}b^2\} \\ 100 = \exp\{2a + \frac{1}{2}b^2 \cdot 4\} - 70^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b^2 = \ln(70) \\ 2a + 2b^2 = \ln(100 + 70^2) \end{cases}$$

$b^2 = 0.0202$

$$\begin{cases} a = 4.2384 \\ b = 0.1421 \end{cases}$$

Wzór to : kapitał = maksymalne szkody ($VaR_{99.5\%}$) - Oczekiwane szkody

$$VaR_{0.995}(L) = \exp\{4.2384 + 0.1421 \cdot \Phi^{-1}(0.995)\} - 70 = 29.93$$

b) Podejście jest dopuszczalne jeżeli ryzyko tych roszczeń jest odzwierciedlone w podmodułach dotyczących ryzyka katastroficznego w ubezpieczeniach innych niż ubezpieczenia na życie i ubezpieczeniach zdrowotnych.

c) $kapitał = 3 \cdot \sigma_{szkód}$

$kapitał = 3 \cdot \sqrt{100} = 30$

Zadanie 5.

Rozważamy trzy linie biznesowe w obrębie spółki, w których wyznaczono jednoroczne wymogi kapitałowe na poziomie 100, 150 i 250. Macierz współczynników korelacji Pearsona wynosi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 1 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Jako miarę ryzyka do wyznaczenia wymogu kapitałowego stosujemy trzykrotność odchylenia standardowego jednorocznej straty.

a) Wyznacz wymóg kapitałowy dla trzech linii łącznie (zdywersyfikowany kapitał dla spółki) (3p).

b) Wyjaśnij, który współczynnik korelacji ma największy wpływ na wymóg kapitałowy analizując zmianę wymogu w wyniku zmiany pojedynczego współczynnika korelacji o 1p.p. (1p).

c) Aktuariusz potwierdził, że rozkłady brzegowe strat w trzech liniach mają rozkłady normalne. Wyjaśnij, czy zastosowana metoda agregacji ryzyka metodą wariancji-kowariancji jest poprawna w tej sytuacji do wyznaczenia zdywersyfikowanego kapitału dla spółki w modelu wewnętrznym w reżimie Wypłacalność II (1p).

a) $RC(L_1 + L_2 + L_3) = \sqrt{x^T \cdot \Sigma \cdot x}$

$x = [100, 150, 250]^T$

$$x^T \cdot \Sigma \cdot x = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 1 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 250 \end{bmatrix} = 166251.9076$$

$RC(L_1 + L_2 + L_3) = 407.74$

b) Z definicji metody wariancji-kowariancji, największy wpływ na wynik ma współczynnik korelacji stojący przed iloczynem najwyższych wymogów kapitałowych. W naszym przykładzie, największy wpływ na wynik ma współczynnik korelacji pomiędzy drugą i trzecią linią biznesową.

c) W reżimie Wypłacalność II stosujemy miarę Value-at-Risk do wyznaczenia kapitału. Zastosowana metoda agregacji jest prawdziwa tylko w sytuacji, gdy łączny rozkład strat jest rozkładem normalnym. Aktuariusz nie potwierdził, że struktura zależności jest kopułą Gaussa.

Zadanie 6.

Rozważamy dwie linie biznesowe w obrębie spółki, w których wyznaczono jednoroczne wymogi kapitałowe na poziomie 100 i 250. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy jednorocznymi stratami w liniach wynosi 0.25. Oczekiwane jednoroczne zyski w liniach wynoszą 20 i 40. Jako miarę ryzyka do wyznaczenia wymogu kapitałowego zastosowano trzykrotność odchylenia standardowego jednorocznej straty.

a) Wyznacz alokacje Eulera zdywersyfikowanego kapitału dla spółki do linii biznesowych (2p).

b) Wyznacz współczynniki RORAC dla linii biznesowych (1p).

c) Załóżmy, że ekspozycje x i y w liniach biznesowych skalują zyski i wymogi proporcjonalnie. Powyższe zyski i wymogi wyznaczone zostały przy ekspozycjach x=100 i y=100. Zapisz warunek dla x i y, przy którym osiągniemy najwyższy poziom RORAC na poziomie spółki (2p).

<u>Wskazówka:</u> Rozważmy miarę ryzyka RC równą odchyleniu standardowemu. W sytuacji dwóch linii, wyznaczamy alokację:

$$RC(L_1|L_1+L_2) = \frac{\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\rho}}.$$

a) $RC(L_1|L_1+L_2) = \dfrac{RC_1^2 + \rho\cdot RC_1\cdot RC_2}{RC(L_1+L_2)}$

$RC(L_1+L_2) = \sqrt{RC_1^2 + RC_2^2 + 2\cdot RC_1\cdot RC_2\cdot \rho}$

$L = L_1 + L_2$

$$RC(L_1|L) = \frac{100^2 + 100\cdot 250\cdot 0.25}{\sqrt{100^2+250^2+2\cdot 100\cdot 250\cdot 0.25}} = 55.73$$

$$RC(L_2|L) = \frac{250^2 + 100\cdot 250\cdot 0.25}{\sqrt{100^2+250^2+2\cdot 100\cdot 250\cdot 0.25}} = 235.81$$

b) $RORAC = \dfrac{\text{zysk całkowity}}{\text{zdywersyfikowany kapitał}}$

$$RORAC_{L_1} = \frac{20}{55.73} = 0.3588$$

$$RORAC_{L_2} = \frac{40}{235.81} = 0.1696$$

c) Linia I jest bardziej rentowna (wyższy RORAC). Nie można zainwestować

100% w linii I bo tracimy wtedy korzyści z dywersyfikacji.

Całkowity RORAC osiąga maksimum w punkcie, w którym:

$RORAC_{L_1} = RORAC_{L_2}$

x - udział linii I

y - udział linii II

$x + y = 1$ (dodatkowo skalujemy przez 100)

Zysk linii I : $0.2x$

Zysk linii II : $0.4y$

Bierzemy wzór z punktu a) i dokładamy do niego wagi, x i y muszą spełniać:

$x + y = 1$

$$\frac{0.2 \cdot x}{\frac{1^2 \cdot x^2 + 1 \cdot 2.5 \cdot x \cdot y \cdot 0.25}{\sqrt{1^2 \cdot x^2 + 2.5^2 \cdot y^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2.5 \cdot x \cdot y \cdot 0.25}}} =$$

$$= \frac{0.4 \cdot y}{\frac{2.5^2 \cdot y^2 + 1 \cdot 2.5 \cdot x \cdot y \cdot 0.25}{\sqrt{1^2 \cdot x^2 + 2.5^2 \cdot y^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2.5 \cdot x \cdot y \cdot 0.25}}}$$

Zadanie 7.

Jako jednorodną grupę ryzyka rozważamy ryzyka ubezpieczone umowami odpowiedzialności cywilnej lekarzy o sumach ubezpieczenia (gwarancyjnych) $v_1, \dots, v_n > M$ generujących szkody $X_1, \dots, X_n$. Zakładamy, że

$$X_i = \min(X, v_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie X jest ogólną zmienną opisującą szkody odpowiedzialności cywilnej w danej grupie ryzyka. Niech $b(v)$ oznacza składkę aktuarialną (czystą) brutto za ryzyko X przy sumie ubezpieczenia v, tzn. za ryzyko $\min(X, v)$. Zachodzi reguła Riebesell'a:

$$\frac{b(v)}{b(v_0)} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\log_2(1+z)}, \qquad z \in (0,1).$$

Rozważamy podejście oparte na *increased limits factors curve.* Ryzyka objęte zostały umowami nadwyżki szkody *excess loss*.

a) Wyceń wartość pojedynczej szkody odpowiedzialności cywilnej na udziale reasekuratora reasekurowanej zgodnie z umową ∞ xs M dla ryzyka X_i przy założeniu, że posiadamy składkę aktuarialną (czystą) brutto za ryzyko X_i. (3p).

b) Wyceń wartość portfela n szkód odpowiedzialności cywilnej na udziale reasekuratora reasekurowanych zgodnie z umowami ∞ xs M przy założeniu, że posiadamy składkę aktuarialną (czystą) brutto za ryzyko X przy bazowej sumie ubezpieczenia $v_0 > M$. (2p).

a) ∞ xs M – ubezpieczyciel zatrzymuje na udziale własnym szkody do wysokości M, a reasekurator pokrywa całą nadwyżkę M (aż do nieskończoności)

$\max(X_i - M, 0)$ – wypłata reasekuratora dla pojedynczej szkody

Całkowita szkoda z polisy (X_i) dzieli się na to, co zatrzymuje ubezpieczyciel $[\min(X_i, M)]$ i to co płaci reasekurator $[\max(X_i - M, 0)]$

$X_i = \min(X_i, M) + \max(X_i - M, 0)$

$\max(X_i - M, 0) = X_i - \min(X_i, M)$

Zachodzi:

$E[\max(X_i - M, 0)] = E[X_i] - E[\min(X_i, M)] =$

$= E[\min(X, v_i)] - E[\min(\min(X, v_i), M)] = \left| \begin{array}{l} \text{z treści zadania } v_1, \dots, v_n > M \\ \text{dlatego limitem jest } M \end{array} \right| =$

$= E[\min(X, v_i)] - E[\min(X, M)] =$

$= E[\min(X, v_i)] \left(1 - \frac{E[\min(X, M)]}{E[\min(X, v_i)]}\right)$

Z treści zadania $b(v) = E[\min(X, v)]$. Korzystając z reguły Riebesella:

$$\frac{E[\min(X, M)]}{E[\min(X, v_i)]} = \frac{b(M)}{b(v_i)} = \left(\frac{M}{v_i}\right)^{\log_2(1+z)}$$

$$\min(X, v_i) = X_i$$

$$E[\max(X_i - M, 0)] = E[X_i]\left(1 - \left(\frac{M}{v_i}\right)^{\log_2(1+z)}\right)$$

b) Zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n} E[\max(X_i - M, 0)] = \sum_{i=1}^{n}\left(E[\min(X, v_i)] - E[\min(X, M)]\right) =$$

$$= \left| \text{teraz wiemy tylko, że } v_0 > M \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[E[\min(X, v_0)]\left(\frac{E[\min(X, v_i)]}{E[\min(X, v_0)]} - \frac{E[\min(X, M)]}{E[\min(X, v_0)]}\right)\right] =$$

$$= E[X_0]\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{v_i}{v_0}\right)^{\log_2(1+z)} - \left(\frac{M}{v_0}\right)^{\log_2(1+z)}\right)$$

Zadanie 8.

Wymień i krótko opisz wymogi jakie powinien spełnić model wewnętrzny w świetle Dyrektywy Wypłacalność II, aby został zaakceptowany przez organ nadzoru. Należy opisać pięć standardów (5p).

1. Test wykorzystania (Use test)

   Model wewnętrzny nie może być tworzony wyłącznie w celu obniżenia wymogów kapitałowych i raportowania do nadzoru ("model do szuflady"). Musi być faktycznie, na co dzień używany w firmie. Zakład ubezpieczeń musi udowodnić, że model odgrywa istotną rolę w systemie zarządzania ryzykiem, procesach decyzyjnych (np. przy ustalaniu cen, reasekuracji) oraz w procesie alokacji kapitału gospodarczego.

2. Standardy jakości statystycznej (Statistical quality standards)

   Wymóg ten dotyczy „matematycznego i danowego" fundamentu modelu. Metody wyznaczania rozkładów prawdopodobieństwa muszą być rzetelne i opierać się na powszechnie uznanych technikach aktuarialnych. Dane używane w modelu (zarówno historyczne dane własne, jak i rynkowe) muszą być odpowiedniej jakości – kompletne, dokładne i wiarygodne. Ponadto wszelkie przyjęte założenia eksperckie muszą być rzetelnie uzasadnione.

3. Standardy kalibracji (Calibration standards)

   Model wewnętrzny może wykorzystywać różne miary ryzyka czy horyzonty czasowe na potrzeby wewnętrzne firmy, ale na potrzeby wyliczenia Kapitałowego Wymogu Wypłacalności (SCR) dla nadzoru, musi być w stanie wykalibrować wynik do konkretnego, narzuconego prawem standardu. Wynik ten musi odpowiadać miarze Value-at-Risk (VaR) na poziomie ufności 99,5% w horyzoncie jednego roku (zabezpieczenie przed zdarzeniem, które występuje średnio raz na 200 lat).

4. Standardy walidacji (Validation standards)

   Zakład ubezpieczeń ma obowiązek wdrożyć niezależny i regularny proces oceny działania swojego modelu. Walidacja polega na sprawdzaniu, czy model nadal prawidłowo odzwierciedla profil ryzyka firmy. Obejmuje to m.in. *back-testing* (porównywanie wyników przewidywanych przez model z faktycznymi stratami z przeszłości), analizę wrażliwości oraz testy warunków skrajnych (stress-testy).

5. Standardy dokumentacji (Documentation standards)

   Każdy element modelu wewnętrznego musi być wyczerpująco udokumentowany. Dokumentacja musi szczegółowo opisywać budowę modelu, jego podstawy teoretyczne i matematyczne, architekturę systemów IT, ograniczenia modelu oraz proces jego zatwierdzania i wprowadzania w nim zmian. Dokumentacja musi być na tyle przejrzysta i kompletna, aby organ nadzoru lub niezależny audytor mógł w pełni zrozumieć i ocenić, jak działa model.

Zadanie 9.

Jako początkową datę wyceny pozycji w bilansie rozważamy początek roku kalendarzowego 2024. Firma ubezpieczeniowa posiada dwuletnie zobowiązanie. Świadczenia są płatne pod koniec pierwszego i drugiego roku kalendarzowego i pochodzą, w roku pierwszym, z rozkładu log-normalnego o wartości oczekiwanej 6 i odchyleniu 1.5 na skali logarytmicznej, oraz, w roku drugim, z rozkładu log-normalnego o wartości oczekiwanej 4 i odchyleniu 0.5 na skali logarytmicznej. Wartość najlepszego oszacowania zobowiązania *best estimate* wyznaczamy jako zdyskontowaną wartość przyszłych świadczeń, gdzie do dyskontowania wykorzystujemy stopę wolną od ryzyka dla odpowiedniego terminu zapadalności zobowiązania. Pomijamy margines ryzyka w wycenie zobowiązania. Firma posiada aktywa w wysokości 4,000. Aktywa zostały zainwestowane w 75% w 2-letnią zero-kuponową obligację rządową, bez ryzyka kredytowego, o rocznej stopie rentowności równej 5% oraz w 25% w akcje. Instrumenty finansowe wyceniane są zgodnie z wartościami rynkowymi, na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i obligacje są płynnie handlowane na rynku finansowym.

a) Wyznacz wartość środków własnych w reżimie Wypłacalność II na początku roku kalendarzowego (1p).

b) Wyznacz wartość środków własnych w reżimie Wypłacalność II na koniec roku kalendarzowego, po realizacji świadczeń, w scenariuszu: wzrostu stopy rentowności z obligacji do poziomu 7% (nadal zakładamy płaską strukturę terminową po zmianie stopy rentowności na koniec 2024r.), spadku ceny akcji o 5%, wysokości świadczeń w pierwszym roku na poziomie kwantyla 95% rozkładu prawdopodobieństwa bez zmiany założeń związanych z wyceną najlepszego oszacowania świadczenia w roku drugim (3p),

c) Wyjaśnij jak zmieni się wielkość środków własnych w p. b) jeżeli aktuariusz zmieni założenia wyceny najlepszego oszacowania świadczenia w roku drugim zwiększając o 10% wartość zobowiązania stosunku do założeń z początku roku 2024 (1p).

Wskazówka: Niech $X = e^{a+bZ}$ gdzie $Z \sim N(0,1)$. Wtedy $E[X^k] = e^{ak\ \frac{1}{2}b^2k^2}$.

a) środki własne = aktywa − zobowiązania

Wyznaczamy wartości oczekiwane X_1, X_2 w pierwszym i drugim roku :

$$E[X_1] = \exp\{6 + \tfrac{1}{2}\cdot 1.5^2\} = 1242.65$$

$$E[X_2] = \exp\{4 + \tfrac{1}{2}\cdot 0.5^2\} = 168.17$$

Dyskontowanie stopą wolną od ryzyka :

$$\frac{1242.65}{1.05} + \frac{168.17}{1.05^2} = 1336.01$$

środki własne $= 4000 - 1336.01 = 2663.99$

b) W zadanym scenariuszu, na moment $t=1$:

- Wartość płatności na poziomie kwantyla 95% : $\exp\{6 + \Phi^{-1}(0.95) \cdot 1.5\} =$
  $= \exp\{6 + 1.6449 \cdot 1.5\} = 4756.56$
- Wartość oczekiwana płatności w drugim roku wynosi :
  $\frac{168.17}{1.07} = 157.17$
- Wartość akcji wynosi :
  $0.25 \cdot 4000 \cdot (1 - 0.05) = 950$
- Wartość obligacji :
  $0.75 \cdot 4000 \cdot \frac{1.05^2}{1.07} = 3091.12$ cena nominalna zdyskontowana przy nowej rentowności
- Środki własne $= 950 + 3091.12 - 4756.56 - 157.17 = -872.61$

c) Środki własne spadną ponieważ zwiększy się wartość zobowiązania na moment $t = 1$.

Zadanie 10.

Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową stóp procentowych i stopę procentową w wysokość 3%. Firma ubezpieczeniowa rozważa następującą strukturę inwestycji:

Lokaty	Nominał w PLN
Jednoroczne obligacje Skarbu Państwa o kuponie 5%	100
Dwuletnie obligacje Skarbu Państwa o kuponie 6%	100
Trzyletnie obligacje skarbu państwa o kuponie 7%	100

Obligacje Skarbu Państwa nie posiadają ryzyka kredytowego i wypłacają kupony na koniec roku. Nie ma ograniczeń w handlu obligacjami na rynku finansowy. Zobowiązanie firmy ubezpieczeniowej ma postać płatności 150, 100, 50 PLN w latach 1, 2 i 3.

a) Zaproponuj skład portfela inwestycyjnego, tak aby dopasować płatności (*cash flow matching*) (3p).

b) Podaj przykład problemu jaki mógłbyś napotkać w praktyce z zastosowaniem powyższej strategii do zabezpieczenia płatności z portfela rent wypłacanych przez okres 30 lat (1p).

c) Wyjaśnij, czy mógłbyś zastosował powyższą strategię, o takiej samej skuteczności, kupując obligacje korporacyjne z ryzykiem kredytowym (1p).

Obligacja 1-roczna płaci 5% kuponu plus zwrot nominału czyli 105 w roku 1, z kolejnymi obligacjami jest podobnie.

a) Niech a oznacza liczbę obligacji jednorocznych, b - liczbę obligacji dwuletnich, c - liczbę obligacji trzyletnich:

$$\begin{cases} 150 = 105a + 6b + 7c \\ 100 = 106b + 7c \\ 50 = 107c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1.35 \\ b = 0.91 \\ c = 0.47 \end{cases}$$

b) Omawiana metoda zabezpieczenia zobowiązania polega na wykorzystaniu obligacji z odpowiednimi terminami zapadalności dopasowanymi do terminów płatności zobowiązania. W praktyce może być trudno znaleźć obligacje z terminami zapadalności do 30 lat.

c) Omawiana metoda zabezpieczenia zobowiązania zakłada znane z góry płatności z obligacji dopasowane do płatności zobowiązania. W przypadku, gdy zakupimy obligacje z ryzykiem kredytowym, narażeni jesteśmy na ryzyko nie otrzymania zakładanych płatności z obligacji i w konsekwencji narażeni jesteśmy na ryzyko nie pokrycia płatności zobowiązania.