

Zadanie 1.

Przez premię za ryzyko rozumiemy poniżej oczekiwaną premię za ryzyko. Dysponujemy następującymi informacjami dla akcji spółki A (w ujęciu rocznym):

Współczynnik beta dla akcji spółki A	1.75
Premia za ryzyko dla portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki A	4 p.p.
Stopa wolna od ryzyka dla obligacji rządowych	3%
Odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji spółki A	10 p.p.
Odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela rynkowego na rynku, na którym handlowane są akcje spółki A	5 p.p.

- Zapisz równanie opisujące stopę zwrotu z akcji zgodnie z modelem CAPM i wskaż komponenty ryzyka systematycznego i niesystematycznego (specyficznego dla akcji), które determinują stopę zwrotu – równanie ma opisywać losową stopę zwrotu i zawierać dwa losowe komponenty ryzyka systematycznego i niesystematycznego (2p).
- Wyznacz premię za ryzyko dla akcji spółki A zgodnie z modelem CAPM (1p).
- Wyznacz jaką część wariancji stopy zwrotu z akcji spółki A jest wynikiem ryzyka systematycznego, a jaka ryzyka specyficznego dla spółki (2p).

- a) Równanie, stanowiące podstawę modelu CAPM, dla kluczowych zmiennych losowych jest postaci

$$R_a = r_f + \beta * (R_m - r_f) + \varepsilon,$$

gdzie R_a jest zmienną losową opisującą stopę zwrotu z akcji, R_m – zmienną losową opisującą stopę zwrotu z portfela rynkowego i jednocześnie zmienną losową opisującą ryzyko systematyczne, ε – niezależną zmienną losową opisującą ryzyko niesystematyczne dla akcji.

- b) Równanie dla wartości oczekiwanych jest postaci

$$E(R_a) - r_f = \beta * (E(R_m) - r_f).$$

$$\beta = 1.75$$

$$E(R_m) - r_f = 4 \text{ p.p.}$$

$$E(R_a) - r_f = 1.75 \cdot 4 \text{ p.p.} = 7 \text{ p.p.}$$

- c) Zgodnie z równaniem z punktu a), możemy wyznaczyć:

$$R_a = r_f + \beta R_m - \beta r_f + \varepsilon$$

$$\text{Var}(R_a) = \text{Var}(\underbrace{r_f - \beta r_f}_{\text{state}} + \beta R_m + \varepsilon) = \text{Var}(\beta R_m + \varepsilon) = \beta^2 \text{Var}(R_m + \varepsilon)$$

$$\sigma_a^2 = \beta^2 \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Dzielimy wariancję systematyczną przez wariancję całkowitą:

$$\text{udział wpływu systematycznego} = \frac{\beta^2 \cdot \sigma_m^2}{\sigma_a^2} = \frac{1.75^2 \cdot 0.05^2}{0.1^2} = 0.7656$$

$$\text{udział wpływu specyficznego} = 1 - 0.7656 = 0.2344$$

Zadanie 2.

Rozważmy dwa ryzykowne aktywa i jeden instrument wolny od ryzyka dostępne na rynku finansowym. Ryzykowne aktywa mają oczekiwane stopy zwrotu - 3% i 6%, odchylenia standardowe stóp zwrotu - 7% i 10% i współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy stopami zwrotu równy 25%. Łączny rozkład stóp zwrotu dla ryzykownych aktywów jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym. Stopa wolna od ryzyka wynosi 2%. Rozważamy problem wyboru portfela Markowitza.

- a) Inwestor wybrał alokację środków (w procentach) w_1, w_2, w_3 ($w_1 + w_2 + w_3 = 1$) pomiędzy aktywa ryzykowne i wolne od ryzyka. Wyznacz wartość oczekiwaną stopy zwrotu z inwestycji oraz miarę Value-at-Risk straty z inwestycji na poziomie 0.95 (strata z inwestycji mierzona jest stopą zwrotu z inwestycji ze znakiem przeciwnym). Obliczenia należy uzasadnić (3p).
- b) Wyznacz alokację środków (w procentach) w_1, w_2, w_3 ($w_1 + w_2 + w_3 = 1$) pomiędzy aktywa ryzykowne i wolne od ryzyka, przy której otrzymamy najmniejsze ryzyko inwestycyjne mierzone Value-at-Risk straty z inwestycji na poziomie 0.95 przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji równej 5% (2p).

$$\mu_1 = 0.03 \quad \sigma_1 = 0.07$$

$$\mu_2 = 0.06 \quad \sigma_2 = 0.1$$

$$\rho = 0.25 \quad r = 0.02$$

a) Niech (X_1, X_2) oznacza parę stóp zwrotu ryzykownych instrumentów. Wiemy, że

$$(X_1, X_2) \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \right) \quad \text{bo } \text{cov} = \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

Z własności 1-go rozkładu normalnego, stopa zwrotu z portfela inwestycyjnego ma rozkład

$$\underbrace{w_1 X_1 + w_2 X_2 + (1 - w_1 - w_2) r}_R \sim N \left(w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 + (1 - w_1 - w_2) r; w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho \right)$$

$$E[R] = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2 + (1 - w_1 - w_2) r$$

$$\text{Var}_p = E[R] + \Phi^{-1}(p) \cdot \sigma_R$$

$$\text{VaR}_{0.95} = -w_1 \mu_1 - w_2 \mu_2 - (1 - w_1 - w_2) r + \Phi^{-1}(0.95) \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho}$$

b) Konieczny problem optymalizacyjny postaci:

$$E[R] = 0.05$$

$$\text{Var}_{0.95} = 0.05 + \Phi^{-1}(0.95) \cdot \sigma_{-R}$$

Wystarczy zminimalizować σ_{-R} :

$$0.07^2 \omega_1^2 + 0.1^2 \omega_2^2 + 2 \cdot 0.07 \cdot 0.1 \cdot 0.25 \omega_1 \omega_2$$

pod warunkiem

$$0.03 \omega_1 + 0.06 \omega_2 + (1 - \omega_1 - \omega_2) \cdot 0.02 = 0.05$$

$$0.03 \omega_1 + 0.06 \omega_2 + 0.02 - 0.02 \omega_1 - 0.02 \omega_2 = 0.05$$

$$0.01 \omega_1 + 0.04 \omega_2 = 0.03 \quad |:0.01$$

$$\omega_1 + 4 \omega_2 = 3$$

$$\omega_1 = 3 - 4 \omega_2$$

Wstawiam do σ_{-R} :

$$0.07^2 (3 - 4 \omega_2)^2 + 0.1^2 \omega_2^2 + 0.0035 (3 \omega_2 - 4 \omega_2^2) \quad | \text{ pochodna}$$

$$0.07^2 \cdot 2 (3 - 4 \omega_2) (-4) + 0.1^2 \cdot 2 \omega_2 + 0.0035 (3 - 2 \omega_2) := 0$$

$$\omega_2 = 41.92\%$$

$$\omega_1 = 12.10\%$$

$$\omega_3 = 15.92\%$$

Zadanie 3.

Rozważamy uproszczony model wewnętrzny w reżimie Wyplacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego roku szkodowego. Stosujemy model Incremental Loss Ratio, w którym skumulowane wypłaty ($C_i, i = 0, \dots, n$), w przyszłych latach kalendarzowych i , opisane są wzorem: $C_0 = 100, C_i = C_{i-1} + X_i$, gdzie $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i^2
1	200	50
2	100	30
3	30	10

Podane oszacowania (μ_i, σ_i^2) są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie zmieniają się w kolejnych latach kalendarzowych. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0%.

- Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w modelu wewnętrznym w reżimie Wyplacalność II, zapisz i uzasadnij stratę, której ryzyko oceniasz, oraz miarę ryzyka, którą zastosujesz (3p).
- Wyznacz wartość zobowiązania na szkody niewypłacone w reżimie Wyplacalność II, w tym wyznacz wartość najlepszego oszacowania (*best estimate*) i margines ryzyka (*risk margin*) przy koszcie kapitału równym 6%. Wymogi kapitałowe dla ryzyka rezerw w kolejnych latach kalendarzowych, które wykorzystasz do wyznaczenia marginesu ryzyka, należy wyznaczyć dokładnie zgodnie z rozkładem straty w kolejnych latach kalendarzowych. Obliczenia należy uzasadnić (2p).

- W reżimie Wyplacalność II mierzymy ryzyko straty jednorocznej w najbliższym roku kalendarzowym przy pomocy miary Value-at-Risk ustalonej na poziomie kwantyla rzędu 99.5% rozkładu straty. Stratę w roku kalendarzowym t możemy zdefiniować jako

$$L_t = E[C_n - C_{t-1} | t+1] - E[C_n - C_{t-1} | t],$$

gdzie $E[.|s]$ oznacza wycenę przepływów z perspektywy początku roku kalendarzowego s . W naszym przypadku, przy zadanych założeniach, mamy

$$C_i = C_{i-1} + X_i$$

$$C_n - C_{t-1} = X_t + X_{t+1} + X_{t+2} + \dots + X_n = \sum_{i=t}^n X_i$$

$$L_t = E\left[\sum_{i=t}^n X_i \mid t+1\right] - E\left[\sum_{i=t}^n X_i \mid t\right] =$$

$$= E\left[X_t + \sum_{i=t+1}^n X_i \mid t+1\right] - E\left[X_t + \sum_{i=t+1}^n X_i \mid t\right] =$$

$$= E[X_t \mid t+1] + E\left[\sum_{i=t+1}^n X_i \mid t+1\right] - E[X_t \mid t] - E\left[\sum_{i=t+1}^n X_i \mid t\right] =$$

$$= X_t - E[X_t] \quad | \text{używamy zmmami nie zmienia, bo } X_i \text{ są niezależne}$$

$$L_t = X_t - E[X_t] \sim N(0, \sigma_i^2), \text{ dla } t=1,2,3.$$

Dodatkowo straty L_1, L_2, L_3 są niezależne.

Wymóg kapitałowy na najbliższy rok kalendarowy $i=1$ jest równy

$$SCR(1) = \text{VaR}_{99.5\%}(L_1) = \mu + \Phi^{-1}(0.995) \cdot \sigma = 0 + 2.57 \cdot 50 = 128.5$$

b) Wartość najlepszego oszacowania na szkody niewypłacone wynosi:

$$BEL(0) = E\left[\sum_{i=1}^3 \frac{X_i}{(1+r_f)^i}\right] = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 200 + 100 + 30 = 330$$

$$\text{przy } r_f = 0\%.$$

Wartość marginesu ryzyka wynosi:

$$RM(0) = CoC \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{SCR(i)}{(1+r_f)^i} = 6\% \cdot 2.57(50 + 30 + 10) = 13.88$$

przy $r_f = 0\%$, gdzie wykorzystano wartości wymogów kapitałowych w kolejnych latach kalendarowych obliczone analogicznie jak dla roku 1.

Wartość rekompensacji na szkody niewypłacone wynosi $330 + 13.88 = 343.88$

Zadanie 4.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie, które ma postać opcji put z ceną wykonania 80 i terminem wykonania 10 lat. Wartość zobowiązania wyceniana jest zgodnie z modelem Blacka-Scholesa przy aktualnych wartościach parametrów stopy procentowej, zmienności i ceny indeksu bazowego. Aktualna cena indeksu bazowego wynosi 100, aktualna zmienność indeksu bazowego wynosi 15%. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i aktualna stopa wolna od ryzyka wynosi 4% (oprocentowanie ciągłe). Firma postanawia skonstruować portfel zabezpieczający zobowiązanie. Na rynku finansowym dostępny jest rachunek bankowy płaćący stopę wolną od ryzyka aktualną w dniu inwestycji, indeks bazowy oraz płynna obligacja 15-letnią bez ryzyka kredytowego z wartością wykupu 100.

- Podaj skład portfela zabezpieczającego i wyznacz strategię delta-rho hedgingową (liczbę instrumentów), gdzie dopasowujemy wartości aktywów i zobowiązań, parametry greckie delta (wrażliwość względem zmiany ceny indeksu bazowego) i rho (wrażliwość względem zmiany stopy procentowej) dla wartości aktywów i zobowiązań (3p).
- Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu ze względu na zmianę stopy procentowej i ceny indeksu bazowego, wyznacz *reverse stress scenario* dla czynników ryzyka stopy procentowej i ceny indeksu bazowego, przy którym wartość zobowiązania zwiększy się dwukrotnie (2p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$\begin{aligned} \text{Cena opcji put} &= -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT}, \\ \text{Delta opcji put} &= -N(-d_1), \quad \text{Rho opcji put} = -N(-d_2)KTe^{-rT} \\ d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

- Wykorzystując wzór Blacka-Scholesa, możemy wyznaczyć wartość zobowiązania jako cenę opcji put oraz wartości parametrów delta i rho dla tej opcji podstawiając

$$r = 0.04, \sigma = 0.15, K = 80, T = 10, S(0) = 100.$$

$$\text{Cena opcji} = 1.51, \text{delta} = -0.06, \text{rho} = -75.53.$$

zobowiązanie jest równe 1,51. Jeśli indeks wzrośnie o 1, wartość zobowiązania spadnie o 0.06. Jeśli stopy procentowe wzrosną o 1 punkt procentowy (0.01), wartość zobowiązania spadnie o 0.7553.

Firma ma do dyspozycji 3 instrumenty, z których zbuduje portfel:

- a - indeks bazowy. Jego obecna cena to 100, delta = 1 (mając ten indeks zmienia się tak samo jak indeks), rho = 0 (bieżąca cena spot nie zależy bezpośrednio od stopy procentowej)

• b - obligacja 15-letnia zerokuponowa. Jej wartość nominalna to 100.

* obecna cena to $100e^{-rT}$

* $\Delta = 0$ (obligacja nie reaguje na zmiany na giełdzie)

* ρ to pochodna ceny po stopie r :

$$\frac{d}{dr} 100e^{-rT} = -100Te^{-rT}$$

• c - gotówka, $\Delta = 0$, $\rho = 0$ (gotówka nie zmienia swojej wartości pod wpływem ryneków)

Równania:

$$\begin{cases} 1.51 = a \cdot (\text{cena indeksu}) + b \cdot (\text{cena obligacji}) + c \\ -0.06 = a \cdot (\Delta \text{ indeksu}) + b \cdot (\Delta \text{ obligacji}) + c \cdot (\Delta \text{ gotówki}) \\ -75.53 = a \cdot (\rho \text{ indeksu}) + b \cdot (\rho \text{ obligacji}) + c \cdot (\rho \text{ gotówki}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.51 = 100a + 100e^{-15 \cdot 0.04} b + c \\ -0.06 = a \\ -75.53 = -15 \cdot 100e^{-15 \cdot 0.04} b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -0.06 \\ b = 0.09 \\ c = 2.52 \end{cases}$$

b) Niech $V(r, s)$ oznacza wartość zobowiązania przy bieżącej stopie procentowej i cenie indeksu bazowego. Stosując aproksymację Taylora wyznaczamy zmianę wartości zobowiązania przy zmianie stopy procentowej i ceny indeksu bazowego ($\Delta r, \Delta s$)

$$V(r + \Delta r, s + \Delta s) - V(r, s) = V_r(r, s)\Delta r + V_s(r, s)\Delta s$$

Powinna różnica zgodnie z treścią zadania musi być większa od 1.51:

$$\Delta V > 1.51$$

$$-75.53 \cdot \Delta r - 0.06 \cdot \Delta s > 1.51 \quad (\text{pochodna po } r \text{ to } \rho, \text{ pochodna po } s \text{ to } \Delta)$$

Dwie zmienne i jedno równanie. Obie opadły się ujemne, aby lewa strona była dodatnia to zmiany na rynku muszą być ujemne. Propozycja:

$$\Delta r = -0.02$$

$$\Delta \Delta = -5$$

$$-45.53(-0.02) - 0.06 \cdot (-5) = 1.5106 + 0.3 = 1.8106$$

Zadanie 5.

Rozważamy jednoroczne ubezpieczenie z funduszem kapitałowym ze składką jednorazową i gwarancją minimalnego świadczenia związanego z dożyciem końca trwania umowy. Zakładamy, że ubezpieczony dożywa końca trwania umowy i pomijamy ryzyko śmiertelności w tym przykładzie. W momencie $t=0$ ubezpieczony wpłaca składkę w wysokości 100 PLN. Następnie, w momencie $t=0$ ubezpieczyciel pobiera opłatę w wysokości $x=5\%$ wpłaconej składki, w celu zabezpieczenia gwarancji minimalnego świadczenia. Składka w wysokości $100 \cdot (1-x)=95$ PLN jest lokowana w fundusz inwestycyjny i wartość inwestycji tworzy wartość rachunku ubezpieczonego. Ubezpieczyciel pobraną opłatę w wysokości $100 \cdot x=5$ PLN lokuje na rachunku bankowym, wolnym od ryzyka, na którym zarabia 3% w okresie rocznym. W momencie końca trwania, w chwili $t=1$, umowy ubezpieczyciel wypłaca ubezpieczonemu większą z wartości: wartość rachunku lub 103% składki wpłaconej na fundusz (składki po potrąceniu wstępnej opłaty).

W oparciu o analizy historyczne, stopy zwrotu z funduszu modelujemy rozkładem lognormalnym, przy założeniu, że logarytm stopy zwrotu ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0.05 i odchyleniu standardowym 0.05. W oparciu o dane rynkowe, zmienności implikowane w modelu Blacka-Scholesa dla funduszu inwestycyjnego dla opcji put na fundusz wynoszą:

Termin zapadalności	Zmienność implikowana
0.5 roku	0.055
1 rok	0.06
2 lata	0.065

Pomijamy podatki i pozostałe koszty działalności ubezpieczeniowej. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowy.

- a) Uzupełnij przepływy poniżej i wyznacz wynik techniczny w scenariuszu, w którym stopa zwrotu z funduszu realizuje się na poziomie kwantyla 5% odpowiedniego rozkładu (2p).

Czas	Rachunek ubezpieczonego t	Rachunek ubezpieczonego $t+1$	Rachunek ubezpieczyciela T	Rachunek ubezpieczyciela $t+1$
$t=0$	95	$95 \cdot 0.96=91.96$	5	$5 \cdot (1+3\%)=5.15$
Czas	Wartość gwarancji $t+1$	Wartość świadczenia $t+1$	Wynik techniczny $t+1$	
$t=0$	$97.85-91.96=5.88$	$95 \cdot (1+3\%)=97.85$	$5.15-5.88=-0.73$	

- b) Wyznacz wartość opłaty początkowej, która byłaby wystarczająca do konstrukcji dynamicznego portfela replikującego gwarancję. Uzasadnij postać równania prowadzącego do wyznaczenia opłaty (w modelu Blacka-Scholesa w czasie ciągłym) (3p).

Wskazówka: wzór Blacka Scholesa dla opcji put:

$$\text{Cena opcji put} = -N(-d_1)S(0) + N(-d_2)Ke^{-rT},$$
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right), \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

a) • Rachunek ubezpieczonego w $t=0$:

Kwota po potrąceniu opłaty, która idzie na fundusz: $100 \cdot 0.95 = 95$

• Rachunek ubezpieczonego w $t+1$:

Kwantyl 5% dla stopy zwrotu z rozkładu lognormalnego wynosi $\exp\{0.05 + 0.05 \cdot (-1.6449)\} = 0.9683$, wartość na rachunku to

$$95 \cdot 0.9623 = 91.99$$

- Rachunek ubezpieczyciela w $t=0$:

$$\text{Kwota opłaty początkowej} = 5$$

- Rachunek ubezpieczyciela w $t+1$:

$$5 \cdot 1.03 = 5.15$$

- Wartość świadczenia w $t+1$:

Jest to minimalna gwarantowana kwota, jaką ubezpieczyciel musi wypłacić klientowi, niezależnie od tego, co stało się na giełdzie $95 \cdot 1.03 = 97.25$

- Wartość gwarancji w $t+1$:

Je koszt jaki ponosi ubezpieczyciel z własnej kieszeni jeśli fundusz zarobił za mało $\max(0; \text{wartość świadczenia} - \text{wolumen ubezpieczonego}) =$

$$= \max(0; 97.25 - 91.96) = 5.28$$

- Wynik techniczny w $t+1$:

Je statyczny zysk lub strata firmy (pieniądze zarobione z opłat) -

$$- (\text{koszt dopłaty do gwarancji}) = 5.15 - 5.28 = -0.73$$

b) • Świadczenie = 100

- Opłata początkowa = x

- Na fundusz trafia $F(0) = 100 \cdot (1 - x)$

- Wartość funduszu w momencie T to liczba kupionych jednostek razy ich aktualna cena: $F(T) = F(0) \cdot S(T)$, dla uśrednienia $S(0) = 1$

- Klient otrzymuje wypłatę z kwot: wartość rachunku $F(T)$ lub 103%.

wpłaconej składki netto:

$$\begin{aligned} \text{świadczenie} &= \max \{ F(0) \cdot 1.03, F(T) \} = F(T) + \max \{ F(0) \cdot 1.03 - F(T), 0 \} = \\ &= F(T) + \max \{ 1.03 F(0) - S(T) \cdot F(0), 0 \} = F(T) + F(0) \underbrace{\max \{ 1.03 - S(T), 0 \}}_{\text{wypłata opcji put z } K=1.03} \end{aligned}$$

wypłata opcji put z $K=1.03$

- Kost quanangji to :

$$H = F(0) \max \{ 1.03 - S(T), 0 \}$$

$$100x = 100(1-x) \max \{ 1.03 - S(T), 0 \}$$

$$x = (1-x) \max \{ 1.03 - S(T), 0 \}$$

Linyyny cene opiji put :

$$r = \log(1 + 0.03) \quad \sigma = 0.06 \quad T = 1 \quad K = 1.03 \quad S(0) = 1$$

$$d_1 = 0.03 \quad d_2 = -0.03$$

$$N(-0.03) = 0.4880 \quad N(0.03) = 0.5120$$

$$\text{cena opiji put} = 0.024$$

$$x = (1-x) \cdot 0.024$$

$$x = 0.0234$$

Opitota pocetkowna powinna wynosic 2.34 iT

Zadanie 6.

Wymień i scharakteryzuj krótko podmoduły ryzyka w obrębie modułu ryzyka aktuarialnego w ubezpieczeniach innych niż ubezpieczenia na życie zgodnie z Rozporządzeniem Delegowanym Wyłącznie II. Dla jednego wybranego podmodułu ryzyka opisz krótko jak wyznaczamy wymogi kapitałowe (5p).

1. Podmoduł ryzyka składek i rezerw (Premium and Reserve Risk) Jest to podstawowy i największy element ryzyka w ubezpieczeniach majątkowych. Łączy on w sobie dwa powiązane ryzyka, które oblicza się wspólnie:

- Ryzyko składek: dotyczy przyszłości. Jest to ryzyko, że zarobione składki okażą się niewystarczające do pokrycia przyszłych szkód i kosztów, które z nich wynikną (np. z powodu złego oszacowania taryfy lub nieoczekiwanego wzrostu częstości/wartości szkód w przyszłym roku).
- Ryzyko rezerw: dotyczy przeszłości. Jest to ryzyko, że obecne rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe (już zawiązane na bilansie) okażą się niewystarczające na pokrycie ostatecznych kosztów likwidacji już zaistniałych szkód (tzw. ryzyko *run-off*).

2. Podmoduł ryzyka rezygnacji (Lapse Risk) Odnosi się do ryzyka straty finansowej wynikającej z nieoczekiwanej zmiany zachowań ubezpieczonych. Dotyczy sytuacji, w których klienci częściej niż zakładano rezygnują z polis, nie odnawiają ich, lub zmieniają warunki ubezpieczenia, co prowadzi do utraty oczekiwanych zysków wliczanych wcześniej w wartość portfela.

3. Podmoduł ryzyka katastroficznego (Catastrophe Risk) Odnosi się do ryzyka poniesienia ogromnych strat w wyniku ekstremalnych, rzadkich, ale bardzo dotkliwych zdarzeń, których nie ujmuje w pełni standardowe ryzyko składek. Dzieli się zazwyczaj na katastrofy naturalne (powódzie, wichury, trzęsienia ziemi), katastrofy spowodowane przez człowieka (terroryzm, pożary wielkich zakładów) oraz inne ryzyka katastroficzne.

Algorytm dla ryzyka składek i rezerw składa się z następujących kroków:

1. Wyznaczenie Miar Wolumenu (Volume Measures): Dla każdej linii biznesowej wyznacza się odrębnie "rozmiar" narażenia na ryzyko:
 - Miara wolumenu dla składek ($\bar{V}_{prem}$) – oparta głównie na składkach zarobionych w kolejnym roku.
 - Miara wolumenu dla rezerw ($\bar{V}_{res}$) – oparta na wartości najlepszego oszacowania rezerw szkodowych (Claims Provision).
2. Przypisanie Odchyłeń Standardowych: Z rozporządzenia Wypłacalność II odczytuje się narzucone parametry rynkowe, czyli odchylenia standardowe przypisane do danej linii biznesowej: odchylenie dla składek (σ_{prem}) oraz odchylenie dla rezerw (σ_{res}).
3. Agregacja wewnątrz linii biznesowej: Dla każdej linii (np. OC komunikacyjne) łączy się ryzyko składek i rezerw, wyliczając łączne odchylenie standardowe dla tej linii, uwzględniając korelację między składkami a rezerwami (zazwyczaj korelacja wynosi 0.5).
4. Agregacja między liniami biznesowymi (Efekt dywersyfikacji): Łączy się wyniki ze wszystkich linii biznesowych, które oferuje ubezpieczyciel, używając do tego macierzy korelacji określonej w dyrektywie. Pozwala to wyznaczyć całkowity wolumen dla firmy ($\bar{V}$) oraz całkowite zagregowane odchylenie standardowe (σ).
5. Obliczenie końcowego wymogu SCR: Wymóg kapitałowy dla tego podmodułu (SCR_{nl_pr}) oblicza się zakładając logarytmiczno-normalny rozkład strat. W uproszczeniu (zgodnym z aproksymacją stosowaną w Solvency II dla VaR 99.5%), wymóg kapitałowy oblicza się jako trzykrotność odchylenia standardowego pomnożonego przez całkowity wolumen:

$$SCR = 3 \cdot \sigma \cdot \bar{V}$$

Zadanie 7.

Wyjaśnij pojęcie ryzyka systematycznego, podaj dwa przykłady ryzyka systematycznego, na które może być narażona firma ubezpieczeniowa, dwie metody zarządzania ryzykiem systematycznym oraz ich skuteczność w redukcji ryzyka systematycznego (5p).

1. Wyjaśnienie pojęcia ryzyka systematycznego Ryzyko

systematyczne (często nazywane ryzykiem rynkowym lub niedywersyfikowalnym) to rodzaj ryzyka wynikający z globalnych czynników makroekonomicznych, rynkowych lub społecznych, które wpływają na cały rynek, gospodarkę lub dany sektor. Jego główną i najważniejszą cechą jest to, że nie można go wyeliminować poprzez prostą dywersyfikację portfela (np. poprzez zwiększenie liczby ubezpieczonych osób czy zakup akcji wielu różnych firm). Niezależnie od tego, jak duży i zróżnicowany jest portfel, ekspozycja na to ryzyko pozostaje, ponieważ uderza ono we wszystkie aktywa lub pasywa jednocześnie.

2. Dwa przykłady ryzyka systematycznego dla firmy ubezpieczeniowej

- Ryzyko stóp procentowych (strona finansowa/aktywów i pasywów): Nagły spadek lub wzrost stóp procentowych narzucony przez banki centralne wpływa na cały rynek. Dla ubezpieczyciela życiowego spadek stóp jest potężnym ryzykiem systematycznym – powoduje spadek zyskowności wszystkich obligacji w portfelu (aktywów), przy jednoczesnym drastycznym wzroście wartości obecnej długoterminowych zobowiązań (pasywów, np. wypłacanych rent).
- Ryzyko długowieczności lub ryzyko pandemiczne (strona techniczno-ubezpieczeniowa): Przełom w medycynie wydłużający nagle życie całego społeczeństwa (ryzyko długowieczności / *longevity risk*) sprawi, że ubezpieczyciel będzie musiał wypłacać renty lub emerytury znacznie dłużej niż zakładał wszystkim swoim klientom naraz. Z kolei nowa globalna pandemia spowoduje skokowy wzrost śmiertelności, uderzając we wszystkie polisy na życie na śmierć jednocześnie. Rozbudowa portfela o kolejnych klientów nie chroni przed tymi zjawiskami.

3. Dwie metody zarządzania ryzykiem systematycznym i ich skuteczność

Skoro ryzyka systematycznego nie da się zdywersyfikować wewnątrznie, firma ubezpieczeniowa musi zastosować inne metody (opierające się głównie na transferze ryzyka).

Metoda 1: Zabezpieczanie instrumentami pochodnymi (Hedging finansowy)

- Zasada działania: Ubezpieczyciel kupuje na rynku finansowym instrumenty (np. swapy na stopy procentowe - *Interest Rate Swaps*, opcje), których wartość zachowuje się odwrotnie do narażenia firmy. Jeśli spadają stopy procentowe i firma traci na rezerwach, posiadany kontrakt swap zyskuje na wartości, kompensując tę stratę.
- Skuteczność w redukcji: Metoda ta jest bardzo skuteczna w redukcji samego ryzyka systematycznego (może zneutralizować ryzyko stóp procentowych niemal do zera). Niestety, w zamian kreuje nowe ryzyka specyficzne. Skuteczność jest pomniejszana przez ryzyko niewypłacalności kontrahenta (*counterparty credit risk* - bank inwestycyjny może zbankrutować i nie wypłacić swapu) oraz ryzyko bazy (*basis risk* - instrument zabezpieczający rzadko idealnie dopasowuje się do struktury pasywów ubezpieczyciela).

Metoda 2: Transfer ryzyka na zewnątrz (Reasekuracja i Sekurytyzacja)

- Zasada działania: Przekazanie ryzyka podmiotom trzecim. W przypadku ryzyka demograficznego (np. długowieczności) ubezpieczyciel może zawrzeć z gigantycznym reasekuratorem tzw. "swap długowieczności", albo wyemitować na rynek kapitałowy tzw. obligacje katastroficzne (CAT bonds) chroniące go np. przed skutkami pandemii.

- Skuteczność w redukcji: Metoda ta bardzo skutecznie zdejmuje ryzyko systematyczne z bilansu ubezpieczyciela i przenosi je na globalnych inwestorów. Jej skuteczność jest jednak drastycznie ograniczona przez wysoki koszt. Rynki finansowe żądają ogromnych premii za przejęcie ryzyka systematycznego. Dodatkowo pojemność tego rynku jest ograniczona (może nie być chętnych na przejęcie całości ryzyka), a podobnie jak przy instrumentach pochodnych, pojawia się ryzyko kredytowe reasekuratora.

Zadanie 8.

Firma ubezpieczeniowa przygotowała bilans w reżimie Wyplacalność II na koniec 2023r. Wyznaczyła wartość najlepszego oszacowania zobowiązań (*best estimate*) równą 200, margines ryzyka (*risk margin*), przy koszcie kapitału 6%, równy 15, kapitałowy wymóg wypłacalności równy 90 oraz wielkość środków własnych (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań) równą 100. Firma wykorzystuje Formułę Standardową. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% na koniec 2023. Wartość najlepszego oszacowania przepływu pieniężnego w roku 2024, które jest uwzględnione w najlepszym oszacowaniu zobowiązania na koniec 2023, wynosi 100 (zakładamy, że przepływ następuje na końcu roku, przed wyceną zobowiązania na koniec 2024). Na koniec roku 2024 okazało się, że przepływ pieniężny w roku 2024 wyniósł 75, zamiast oczekiwanych 100, i aktuariusz postanowił zmienić założenia wyceny, co skutkowało zmniejszeniem najlepszego oszacowania zobowiązań i przyszłych kapitałowych wymogów wypłacalności na koniec 2024 o 5% w porównaniu z oszacowaniem, które zostałyby policzone na koniec 2024 przy parametrach ustalonych na koniec 2023. Struktura terminowa stóp procentowanych nie zmieniła się.

- Wyznacz wartość najlepszego oszacowania zobowiązania na koniec 2024 (1p).
- Wyznacz margines ryzyka na koniec 2024 (1p).
- Wyznacz wielkość środków własnych na koniec 2024, przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka (2p).
- Wyznacz miarę EVA (*Economic Value Added*) w roku kalendarzowym 2024 pomijając podatki. Przyjmij założenie, że zysk ekonomiczny jest równy zmianie środków własnych oraz udziałowcy żądają stopy zwrotu 6% na zainwestowanych środkach równych wartości wymogu kapitałowego (1p).

a) Wartość najlepszego oszacowania wyznaczamy zgodnie z wzorem:

$$BEL_0 = \frac{E(C_1) + BEL_1}{1 + r_f}$$

$BEL_0 = 200$ najlepsze oszacowanie na koniec 2023

$$BEL_0(1 + r_f) = E(C_1) + BEL_1$$

$r_f = 2\%$ stopa wolna od ryzyka

$$BEL_1 = BEL_0(1 + r_f) - E(C_1)$$

$E(C_1) = 100$ spodziewana wypłata w 2024

$$BEL_1 (\text{przed zmianą}) = 200(1 + 0.02) - 100 = 204 - 100 = 104$$

$$BEL_1 (\text{po zmianie}) = 104(1 - 0.05) = 104 \cdot 0.95 = 98.8 \text{ aktuariusz zmniejszył przyszłe zobowiązania o 5\%}$$

b) Wartość marginesu ryzyka wyznaczamy zgodnie z wzorem

$$RM_0 = \frac{CoC \cdot SCR_0 + RM_1}{1 + r_f}$$

$$RM_0 = 15$$

$$r_f = 2\%$$

$$RM_1 = RM_0(1 + r_f) - CoC \cdot SCR_0$$

$$CoC = 6\%$$

$$SCR_0 = 90$$

$$RM_1 (\text{przed zmianą}) = 15 \cdot 1.02 - 0.06 \cdot 90 = 9.90$$

$$RM_1 (\text{po zmianie}) = 9.9 \cdot (1 - 0.05) = 9.41$$

c) Wartość środków własnych na koniec 2023 wynosi 100. Środki własne są powiększane:

- zgodnie ze stopą zwrotu o wartość $2\% \cdot 100 = 2$;
- o wartość środków uwalnianą z marginesu ryzyka, czyli o $6\% \cdot 90 = 5.40$;
- o różnicę pomiędzy realizacją przepływu a jego oczekiwaną wartością, czyli o $100 - 75 = 25$;
- o różnicę związaną ze zmianą założeń, czyli o $5\% \cdot 104 + 5\% \cdot 9.90 = 5.69$.

Wartość środków własnych na koniec 2023 wynosi
 $100 + 2 + 5.40 + 25 + 5.69 = 138.10$.

d) $EVA = \text{wzrosty przyrost środków własnych} - (\text{wymagana stopa zwrotu} \cdot \text{zamrożony kapitał})$

Środki własne rosły ze 100 do 138.10, wzrost = $138.1 - 100 = 38.10$

Firma musi zamrozić $6\% \cdot 90 = 5.4$

$$EVA = 38.1 - 6\% \cdot 90 = 32.69$$

Zadanie 9.

Rozważamy dwie linie biznesowe w obrębie spółki, w których wyznaczono jednoroczne wymogi kapitałowe na poziomie 50 i 250. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy jednorocznymi stratami w liniach wynosi 0.5. Jako miarę ryzyka do wyznaczenia wymogu kapitałowego zastosowano trzykrotność odchylenia standardowego jednorocznej straty.

- Wyznacz wymóg kapitałowy dla obu linii łącznie (zdywersyfikowany kapitał dla spółki) (1p).
- Wyznacz alokacje Eulera zdywersyfikowanego kapitału dla spółki do linii biznesowych – wyprowadź wzór na alokację bezpośrednio z ogólnej definicji alokacji Eulera (2p).
- Wyznacz efekty dywersyfikacji dla każdej linii biznesowej. Wyłóż dlaczego pierwsza linia biznesowa o kapitale 50 posiada wyższy efekt dywersyfikacji (2p).

$$a) \quad RC(L_1 + L_2) = \sqrt{RC_1^2 + RC_2^2 + 2 \rho \cdot RC_1 \cdot RC_2}$$

$$RC(L_1 + L_2) = \sqrt{50^2 + 250^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 50 \cdot 250} = 272.39$$

$$b) \quad EC(L_1|L) = \frac{d}{dh} RC(L_1 + L_2 + hL_1)|_{h=0} \quad RC(L_1 + L_2) = 3SD(L_1 + L_2)$$

$$RC((1+h)L_1 + L_2) = 3SD((1+h)L_1 + L_2) = 3\sqrt{(1+h)^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(1+h)\sigma_1\sigma_2\rho}$$

$$RC(h) = 3 \cdot \sqrt{(1+h)^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(1+h)\sigma_1\sigma_2\rho}$$

$$\frac{d}{dh} RC(h) = 3 \cdot \frac{2(1+h)\sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho}{2\sqrt{(1+h)^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(1+h)\sigma_1\sigma_2\rho}} =$$

$$= 3 \cdot \frac{(1+h)\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{(1+h)^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(1+h)\sigma_1\sigma_2\rho}}$$

$$\frac{d}{dh} RC(h)|_{h=0} = 3 \cdot \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho}} = 3 \cdot \frac{Cov(L_1, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)}$$

Ostatecznie:

$$EC(L_1|L) = 3 \cdot \frac{Cov(L_1, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = 3 \cdot \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\rho}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho}}$$

$$EC(L_1|L) = 3 \cdot \frac{Cov(L_1, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = \frac{50^2 + 50 \cdot 250 \cdot 0.5}{\sqrt{50^2 + 250^2 + 2 \cdot 50 \cdot 250 \cdot 0.5}} = 31.43,$$

3 nie trzeba bo

$$RC = 3 \cdot SD$$

$$EC(L_2|L) = 3 \cdot \frac{Cov(L_2, L_1 + L_2)}{SD(L_1 + L_2)} = \frac{250^2 + 50 \cdot 250 \cdot 0.5}{\sqrt{50^2 + 250^2 + 2 \cdot 50 \cdot 250 \cdot 0.5}} = 246.96.$$

$$c) \text{Div}_{\text{benefit}} = 1 - \frac{\text{kapitał realizowany}}{\text{kapitał indywidualny}}$$

Wyznaczamy efekty dywersyfikacji dla poszczególnych linii

$$\text{Div}_{\text{benefit}_1} = 1 - \frac{31.43}{50} = 37.14\%,$$

$$\text{Div}_{\text{benef}_2} = 1 - \frac{249.96}{250} = 1.21\%.$$

Ponieważ linia 2 generuje znacznie większe ryzyko niż linia 1, możemy wnioskować, że linia 1 generuje znacznie mniejszy zysk niż potencjalna strata w linii 2 (zakładając rozkład normalny o wartości oczekiwanej zero stanowiący podstawę metody agregacji opartej o odchylenie standardowe). W konsekwencji, spodziewamy się, że zysk z linii 1 nie pokryje straty w linii 2, i efekt dywersyfikacji w linii 2 jest mały.

Zadanie 10.

Rozważmy zmienną losową X o rozkładzie Pareto:

$$1 - F_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^\alpha, \quad x > 0,$$

oraz jej uciętą wersję w punkcie M , tzn. $X_{trunc} = \min(X, M)$. Niech $\alpha = 5$, $\lambda = 100$, $M = 200$.

- Wyznacz krzywą *exposure curve* dla zmiennej X_{trunc} (3p).
- Korzystając z krzywej *exposure curve* z p. a) zapisz jak wyznaczyć wartość oczekiwaną szkody z umowy nadwyżki szkody 100 xs 50, mając zadaną wartość oczekiwaną szkody, jeżeli szkoda pochodzi z powyższego uciętego rozkładu Pareto i maksymalna szkoda *probable maximum loss* wynosi 200 (zakładamy jedno zdarzenie szkodowe i jedną szkodę) (1p).
- Wyjaśnij krótko czym się różni umowa nadwyżki szkody (*excess loss*) od nadwyżki szkodowości (*stop loss*) (1p).

Wskazówka:

Krzywa *exposure curve* dla zmiennej X na nośniku $[0, M]$ jest postaci:

$$r(x) = \frac{E[\min(X; x \cdot M)]}{E[X]},$$

gdzie M oznacza *probable maximum loss*.

a) Korzystając z własności:

$$u = x/M$$

$$\begin{aligned} E[\min(X, u)] &= \int_0^u x f(x) dx + \int_u^\infty u f(x) dx = \int_0^u x f(x) dx + u P(X \geq u) = \\ &= \int_0^u x f(x) dx + u(1 - F(u)) = \int_0^u x [F(x)]' dx + u(1 - F(u)) = \\ &= [x F(x)]_0^u - \int_0^u F(x) dx + u(1 - F(u)) = \\ &= u F(u) - 0 - \int_0^u F(x) dx + u - u F(u) = \\ &= u - \int_0^u F(x) dx = \int_0^u 1 - F(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\min(X, u)] &= \int_0^u 1 - F(x) dx = \int_0^u \lambda^\alpha (\lambda + x)^{-\alpha} dx = \\ &= \lambda^\alpha \left[\frac{(\lambda + x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_0^u = \frac{\lambda^\alpha}{1-\alpha} \left[(\lambda + u)^{1-\alpha} - \lambda^{1-\alpha} \right] = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\alpha-1} \left[\lambda^{1-\alpha} - (\lambda + u)^{1-\alpha} \right] \end{aligned}$$

Ponieważ dla każdego $x \in [0, 1]$ zachodzi $xM \leq M$ to: $\min(X_{\text{trans}}, xM) = \min[\min(X, M), xM] = \min(X, xM)$. $r(x) = \frac{E[\min(X, xM)]}{E[\min(X, M)]}$.

$$r(x) = \frac{\lambda^{1-\alpha} - (\lambda + xM)^{1-\alpha}}{\lambda^{1-\alpha} - (\lambda + M)^{1-\alpha}} = \frac{1 - (1 + \frac{xM}{\lambda})^{1-\alpha}}{1 - (1 + \frac{M}{\lambda})^{1-\alpha}}$$

b) 100 x 50 oznacza umowę, w której reasekurator pokrywa koszty szkody powyżej 50 (udział własny U), ale jego odpowiedzialność jest limitowana do 100 (pojemność pokrycia L)

- szkoda = 40 $\Rightarrow$ reasekurator płaci 0
- szkoda = 80 $\Rightarrow$ reasekurator płaci $80 - 50 = 30$
- szkoda = 200 $\Rightarrow$ reasekurator płaci 100

$$\text{wypłata reasekuratora} = \min(X, U+L) - \min(X, U)$$

$$E[\text{wypłata reasekuratora}] = E[\min(X, U+L)] - E[\min(X, U)]$$

2 kroki:

$$u = xM$$

$$E[\min(X, u)] = E[X] r\left(\frac{u}{M}\right)$$

$$E[\text{wypłata reasekuratora}] = E[X] \left[r\left(\frac{U+L}{M}\right) - r\left(\frac{U}{M}\right) \right] =$$

$$= E[X] \left[r\left(\frac{150}{200}\right) - r\left(\frac{50}{200}\right) \right]$$

c) Umowa nadwyżki szkody (excess of loss) chroni ryzyka indywidualne, umowa nadwyżki szkodowości (stop loss) dotyczy całego portfela ubezpieczeń danego rodzaju lub całej działalności ubezpieczyciela.