Zadanie 1.

Załóżmy, że X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Zmienna losowa T jest równa

$$T = \frac{|X|}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Jeśli $x \in (0,1)$, to funkcja gęstości f zmiennej losowej T jest równa

(A) $f(x) = 1$

(B) $f(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

(C) $f(x) = \dfrac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

(D) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(E) $f(x) = \dfrac{4x^2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

Zadanie 2.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi dodatnimi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej a. Niech N i M będą zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona niezależnymi od siebie nawzajem i od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, przy czym $EN = \lambda$ i $EM = \mu$. Niech

$$Y_n = \begin{cases} \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) & gdy\ n > 0 \\ 0 & gdy\ n = 0 \end{cases}.$$

Obliczyć $P(Y_{M+N} > Y_M)$.

(A) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-a}\right)$

(B) $\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-\lambda-\mu}\right)$

(C) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

(D) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-a}\right)\left(1-e^{-\lambda-\mu}\right)$

(E) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-\lambda-\mu}\right)$

Zadanie 3.

Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$, $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{20}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym $EX_i = \mu_1$ i $VarX_i = \sigma^2$ dla $i = 1,2,\ldots,10$, oraz $EX_i = \mu_2$ i $VarX_i = 2\sigma^2$ dla $i = 11,12,\ldots,20$. Parametry μ_1, μ_2 i σ są nieznane.

Niech $\overline{X}_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$, $\overline{X}_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=11}^{20} X_i$, $\overline{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i$.

Dobrać stałe a i b tak, aby statystyka

$$\hat{\sigma}^2 = a\sum_{i=1}^{20}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + b\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)^2$$

była estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.

(A) $a = \frac{1}{27}$, $b = -\frac{1}{54}$

(B) $a = \frac{1}{18}$, $b = -\frac{10}{18}$

(C) $a = \frac{1}{27}$, $b = -\frac{10}{27}$

(D) $a = \frac{1}{27}$, $b = -\frac{5}{27}$

(E) $a = \frac{1}{18}$, $b = -\frac{5}{18}$

Zadanie 4.

Dysponując pięcioma niezależnymi próbkami losowymi o tej samej liczebności n, z tego samego rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną μ i znaną wariancją σ^2, zbudowano pięć standardowych przedziałów ufności dla parametru μ otrzymując przedziały postaci $\left[\overline{X}_i - 1{,}2816\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_i + 1{,}2816\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, gdzie $\overline{X}_i$ jest średnią z obserwacji w i-tej próbce, $i = 1,2,3,4,5$.

Następnie zbudowano przedział ufności dla parametru μ postaci

$$\left[m - 1{,}2816\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m + 1{,}2816\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

Gdzie $m = med\left\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_4, \overline{X}_5\right\}$. Wyznaczyć

$$c = P\left(m - 1{,}2816\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < m + 1{,}2816\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

(A) $c = 0{,}97500$

(B) $c = 0{,}95000$

(C) $c = 0{,}98288$

(D) $c = 0{,}89144$

(E) $c = 0{,}99982$

Zadanie 5.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego, przy czym $EX_i = 0$ i $VarX_i = \frac{\sigma^2}{i}$, gdzie σ^2 jest nieznanym parametrem.
Rozważamy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \sigma^2 \leq 4$ przy alternatywie $H_1 : \sigma^2 > 4$ na poziomie istotności 0,05.
Niech *S* oznacza zbiór tych wartości wariancji σ^2, dla których moc tego testu jest nie mniejsza niż 0,95. Wtedy *S* jest równy

(A) $(20{,}353;\ +\infty)$

(B) $(18{,}584;\ +\infty)$

(C) $(17{,}307;\ +\infty)$

(D) $(15{,}761;\ +\infty)$

(E) $(15{,}051;\ +\infty)$

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_8$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-\theta, \theta]$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Hipotezę $H_0: \theta = 2$ przy alternatywie $H_1: \theta = 4$ weryfikujemy testem najmocniejszym na poziomie istotności 0,1. Prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju jest równe

(A) 0,0035

(B) 0,0933

(C) 0,1000

(D) 0,0060

(E) 0,1566

Zadanie 7.

Zmienne losowe X i Y są niezależne i każda ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną $\lambda > 0$. Obliczyć

$$Var\left(\min\{X, Y\} \middle| S = X + Y = 2\right).$$

(A) $\frac{6}{12}$

(B) $\frac{2}{12}$

(C) $\frac{3}{12}$

(D) $\frac{4}{12}$

(E) $\frac{1}{12}$

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,\ I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi . Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $\mu > 0$. Zmienne $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ mają rozkład dwupunktowy $P(I_i = 1) = 1 - P(I_i = 0) = p$, gdzie $p \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą. Zmienna N ma rozkład ujemny dwumianowy

$P(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)n!}(1-q)^r q^n$ dla $n = 0,1,2,\ldots$, gdzie $r > 0$ i $q \in (0,1)$ są ustalone.

Niech

$$T_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & gdy \quad N \geq 1 \\ 0 & gdy \quad N = 0 \end{cases} \qquad S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} I_i X_i & gdy \quad N \geq 1 \\ 0 & gdy \quad N = 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć współczynnik kowariancji $Cov(T_N, S_N)$.

(A) $\frac{p\mu^2 rq(2-q)}{(1-q)^2}$

(B) $\frac{p\mu^2 r(1+q)}{(1-q)^2}$

(C) $\frac{p\mu^2 r(1+q-q^2)}{(1-q)^2}$

(D) $\frac{p\mu^2 rq}{1-q}$

(E) $\frac{p\mu^2 r(1-q^2)}{q^2}$

Zadanie 9.

Zakładając, że obserwacje $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ stanowią próbkę losową z rozkładu Pareto o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{3^\theta \theta}{(3+x)^{\theta+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem, wyznaczono wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ i otrzymano $\hat{\theta} = 2$. W próbce były dwie obserwacje o wartości 6, a pozostałe osiem obserwacji miało wartości mniejsze od 6. Okazało się, że w rzeczywistości zaobserwowane wartości stanowiły próbkę z uciętego rozkładu Pareto, czyli były realizacjami zmiennych losowych $X_i = \min\{Y_i, 6\}$, gdzie Y_i, $i = 1,2,\ldots,10$, są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości f_θ. Wyznaczyć wartość estymatora największej wiarogodności parametru θ po uwzględnieniu modyfikacji założeń.

(A) 2,00

(B) 2,85

(C) 1,60

(D) 1,50

(E) 3,00

Zadanie 10.

Dysponujemy dwiema urnami: A i B. W urnie A są dwie kule białe i trzy czarne, w urnie B są trzy kule białe i dwie czarne. Wykonujemy trzy etapowe doświadczenie:
1 etap: losujemy urnę (wylosowanie każdej urny jest jednakowo prawdopodobne);
2 etap: z wylosowanej urny ciągniemy 2 kule bez zwracania, a następnie wrzucamy je do drugiej urny;
3 etap: z urny, do której wrzuciliśmy kule, losujemy jedną kulę.
Okazało się, że wylosowana w trzecim etapie kula jest biała.
Obliczyć prawdopodobieństwo, że w drugim etapie wylosowano dwie kule jednego koloru.

(A) 0,5

(B) 0,4

(C) 0,3

(D) 0,2

(E) 0,1

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 stycznia 2007 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	D	
4	C	
5	B	
6	A	
7	E	
8	A	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.