Zadanie 1

W loterii bierze udział 10 osób. Regulamin loterii faworyzuje te osoby, które w eliminacjach osiągnęły lepsze wyniki:

- Zwycięzca eliminacji, nazywany graczem nr. 1 otrzymuje 10 losów,
- Osoba, która zajęła drugie miejsce w eliminacjach, nazywana graczem nr. 2, otrzymuje 9 losów,
- Osoba, która zajęła trzecie miejsce w eliminacjach, nazywana graczem nr. 3, otrzymuje 8 losów,
- ....
- Osoba, która zajęła dziesiąte miejsce w eliminacjach, nazywana graczem nr. 10, otrzymuje 1 los.

Jeden spośród 55 losów przynosi wygraną. Oblicz *wartość oczekiwaną numeru* gracza, który posiada wygrywający los.

(A) 4

(B) 3

(C) $\frac{10}{3}$

(D) 5

(E) 6

Zadanie 2

Niech zmienna losowa S_n będzie liczbą sukcesów w n próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. O zdarzeniu losowym A wiemy, że

$$\Pr(A \mid S_n = k) = a\frac{k}{n} \quad \text{dla} \quad k = 0,1,\dots,n,$$

gdzie a jest znaną liczbą, $0 < a \le 1$. Oblicz $E(S_n \mid A)$.

(A) $pn + 1 - p$

(B) $ap(n+1)$

(C) $p(n+1)$

(D) $pn + 1$

(E) $apn + 1$

Zadanie 3

Rozważmy próbkę $X_1,...,X_n$ z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0,\theta]$ (z nieznanym prawym końcem θ). Niech $M = \max(X_1,...,X_n)$. Należy zbudować przedział ufności dla θ na poziomie 90%. Chcemy, żeby ten przedział był postaci $[aM, bM]$, gdzie liczby a i b są tak dobrane, żeby

$$\Pr(\theta < aM) = \Pr(\theta > bM) = 0.05.$$

Podaj długość tego przedziału.

(A) $\left(\sqrt[n]{0.95} - \sqrt[n]{0.05}\right)M$

(B) $\left(\sqrt[n]{20} - 1\right)M$

(C) $\left(\sqrt[n]{20} - \sqrt[n]{\frac{20}{19}}\right)M$

(D) $\left(\sqrt[n]{19}\right)M$

(E) $\left(\sqrt[n]{20} - \sqrt[n]{\frac{20}{19}}\right)\theta$

Zadanie 4

Rozważmy sumę losowej liczby zmiennych losowych:

$$S = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \, .$$

Przyjmijmy typowe dla kolektywnego modelu ryzyka założenia: składniki X_i mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, są niezależne od siebie nawzajem i od zmiennej losowej N. Przyjmijmy oznaczenia:

$$E(X_i) = \mu, \quad Var(X_i) = \sigma^2, \quad E(N) = m, \quad Var(N) = d^2 \, .$$

Podaj współczynniki a_*, b_* funkcji liniowej $a_* S + b_*$, która najlepiej przybliża zmienną losową N w sensie średniokwadratowym:

$$E\left\{(a_* S + b_* - N)^2\right\} = \min_{a,b} E\left\{(aS + b - N)^2\right\}$$

(A) $a_* = \dfrac{1}{\mu}, \quad b_* = 0$

(B) $a_* = \dfrac{\mu d^2}{\mu^2 d^2 + m\sigma^2}, \quad b_* = \dfrac{m^2\sigma^2}{\mu^2 d^2 + m\sigma^2}$

(C) $a_* = \dfrac{\mu^2 d^2}{\mu^2 d^2 + m\sigma^2}, \quad b_* = \dfrac{m\sigma^2}{\mu^2 d^2 + m\sigma^2}$

(D) $a_* = \dfrac{m d^2}{\mu^2 d^2 + m\sigma^2}, \quad b_* = \dfrac{\mu^2\sigma^2}{\mu^2 d^2 + m\sigma^2}$

(E) $a_* = \dfrac{m d^2}{m^2 d^2 + \mu\sigma^2}, \quad b_* = \dfrac{\mu^2\sigma^2}{m^2 d^2 + \mu\sigma^2}$

Wskazówka: Oblicz $Cov(N, S)$ i $Var(S)$.

Zadanie 5

Niech $X_1,\dots,X_{16}$ będzie próbką z rozkładu jednostajnego o gęstości danej wzorem:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 1/\theta & dla \quad 0 \le x \le \theta; \\ 0 \quad w \quad przeciwnym & przypadku. \end{cases}$$

Zmienne losowe $X_1,\dots,X_{16}$ nie są w pełni obserwowalne. Obserwujemy zmienne losowe $Y_i = \min(X_i, 10)$. Oblicz estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ na podstawie następującej próbki:

$$(Y_1,\dots,Y_{16}) = (\ 4,\ 8, 10,\ 5, 10,\ 9,\ 7,\ 5,\ 8, 10,\ 6, 10,\ 3, 10, 6, 10)$$

(A) $\hat{\theta} = 13.333$

(B) $\hat{\theta} = 16$

(C) $\hat{\theta} = 10$

(D) $\hat{\theta} = 20$

(E) nie można zastosować metody największej wiarogodności do tych danych

Wskazówka: Zauważ, że w próbce jest 10 obserwacji mniejszych od 10 oraz 6 obserwacji o wartości równej 10.

Zadanie 6

Rozważmy następujące zagadnienie testowania hipotez statystycznych. Dysponujemy próbką $X_1,...,X_n$ z rozkładu normalnego o nieznanej średniej μ i znanej wariancji równej 1. Przeprowadzamy najmocniejszy test hipotezy $H_0 : \mu = 0$ przeciwko alternatywie $H_1 : \mu = 1$ na poziomie istotności $\alpha = 1/2$. Oczywiście, moc tego testu zależy od rozmiaru próbki. Niech β_n oznacza prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju, dla rozmiaru próbki n.

Wybierz poprawne stwierdzenie:

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{1/n} = 1$ (wraz ze wzrostem n, prawdopodobieństwo β_n maleje do zera z podobną szybkością, jak ciąg $1/n$).

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{1/n^2} = 1$ (wraz ze wzrostem n, prawdopodobieństwo β_n maleje do zera z podobną szybkością, jak ciąg $1/n^2$).

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{e^{-n^2/2}} = 1$ (wraz ze wzrostem n, prawdopodobieństwo β_n maleje do zera z podobną szybkością, jak ciąg $e^{-n^2/2}$).

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{e^{-n/2} / \sqrt{2\pi \cdot n}} = 1$ (wraz ze wzrostem n, prawdopodobieństwo β_n maleje do zera z podobną szybkością, jak ciąg $e^{-n/2} / \sqrt{2\pi \cdot n}$).

(E) żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe

Zadanie 7

Wybieramy losowo 5 kart spośród 52. Rozważmy następujące zdarzenia losowe:

$A_{\geq 1} = \{$ wśród wybranych kart jest przynajmniej 1 as $\}$;

$A_{\geq 2} = \{$ wśród wybranych kart są przynajmniej 2 asy $\}$;

$A_{pik} = \{$ wśród wybranych kart jest as pikowy $\}$.

Oblicz prawdopodobieństwa warunkowe $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{\geq 1})$ i $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{pik})$.
Wybierz prawidłową odpowiedź:

(A) $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{\geq 1}) = \Pr(A_{\geq 2} \mid A_{pik}) = 0.1222$

(B) $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{\geq 1}) = 0.2214$ i $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{pik}) = 0.1222$

(C) $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{\geq 1}) = 0.1222$ i $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{pik}) = 0.2214$

(D) $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{\geq 1}) = \Pr(A_{\geq 2} \mid A_{pik}) = 0.2214$

(E) $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{\geq 1}) = 0.3214$ i $\Pr(A_{\geq 2} \mid A_{pik}) = 0.4537$

Zadanie 8

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy tym $E[X] = E[Y] = 0$, $Var[X] = 1$ i $Var[Y] = 3$.

Oblicz $\Pr[|X| < |Y|]$.

(A) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.6333$

(B) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.7500$

(C) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.5000$

(D) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.6667$

(E) $\Pr[|X| < |Y|] = 0.7659$

Zadanie 9

Niech $X_1,...,X_n$ będzie próbką z rozkładu o gęstości danej wzorem:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1/\theta - 1}}{\theta} & dla \quad 0 < x < 1; \\ 0 \quad w \quad przeciwnym \quad przypadku. \end{cases}$$

Znajdź estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ i oblicz błąd średniokwadratowy (ryzyko) tego estymatora,

$$R(\theta) = E_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2].$$

(A) $R(\theta) = \dfrac{1}{n^2}\left(\theta + \dfrac{1}{\theta}\right)$

(B) $R(\theta) = \dfrac{\theta^2}{n}$

(C) $R(\theta) = \dfrac{1}{n\theta}$

(D) $R(\theta) = \dfrac{1}{n}\left(\theta + \dfrac{1}{\theta}\right)$

(E) $R(\theta) = \dfrac{1}{n\theta^2}$

Zadanie 10

Rozpatrzmy następujący model regresji liniowej bez wyrazu wolnego:

$$Y_i = \beta \cdot x_i + \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

gdzie x_i są znanymi liczbami, β jest nieznanym parametrem, zaś ε_i są błędami losowymi. Zakładamy, że

$$E[\varepsilon_i] = 0 \quad \text{i} \quad Var[\varepsilon_i] = x_i^2 \sigma^2 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Skonstruuj estymator $\hat{\beta}$ parametru β o następujących własnościach:

$\hat{\beta}$ jest liniową funkcją obserwacji, tzn. jest postaci $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$,

$\hat{\beta}$ jest nieobciążony, tzn. $E\hat{\beta} = \beta$,

$\hat{\beta}$ ma najmniejszą wariancję spośród estymatorów liniowych i nieobciążonych.

(A) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$

(B) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$, gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$

(C) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum Y_i}{\sum x_i}$

(D) $\hat{\beta} = \dfrac{1}{n} \sum \dfrac{Y_i}{x_i}$

(E) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum \sqrt{x_i} Y_i}{\sum x_i}$

Wskazówka: Można wyprowadzić poprawny wzór rozwiązując zadanie minimalizacji, albo skorzystać z Twierdzenia Gaussa-Markowa.

Egzamin dla Aktuariuszy z 11 października 2003 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~PESEL~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	A	
3	C	
4	B	
5	B	
6	D	
7	C	
8	D	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.