Zadanie 1.

Z odcinka $[0,1]$ wybieramy losowo punkt X_1. Następnie z odcinka $[0, X_1]$ wybieramy losowo punkt X_2, z odcinka $[0, X_2]$ - punkt X_3 i tak dalej. Oblicz współczynnik zmienności otrzymanego w n-tym kroku punktu X_n, czyli

$$\frac{\sqrt{Var(X_n)}}{E(X_n)}$$

(A) $\sqrt{2/3-(1/3)^n}$

(B) $\sqrt{(3/4)^n+1}$

(C) $\sqrt{(4/3)^n-1}$

(D) $\sqrt{3n^2-4n}$

(E) $1/3$ dla każdego $n \geq 1$

Wskazówka: Zmienna X_n jest iloczynem niezależnych zmiennych losowych.

Zadanie 2.

W urnie znajduje się 20 kul, na każdej z nich jest narysowana litera i cyfra. Mamy:

- 8 kul oznaczonych **A1**
- 4 kule oznaczone **A2**
- 6 kul oznaczonych **B1**
- 2 kule oznaczone **B2**

Losujemy *bez zwracania* 10 kul. Niech N_A oznacza liczbę wylosowanych kul, oznaczonych literą **A**, zaś N_1 - liczbę wylosowanych kul, oznaczonych cyfrą **1**. Oblicz

$$E(N_1 \mid N_A).$$

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{2}{3}N_A$

(C) $-\frac{1}{12}N_A + \frac{3}{4}$

(D) $\frac{1}{12}N_A + \frac{3}{5}$

(E) $-\frac{1}{12}N_A + \frac{15}{2}$

Zadanie 3.

O zmiennych losowych X i Y wiemy, że $0 \le Y \le X$, $\Pr(X = 0) = 0$,

$$E(Y \mid X) = \frac{X}{2} \quad \text{i} \quad Var(Y) = \frac{1}{2}Var(X) + \frac{1}{4}E^2(X).$$

Z tych założeń wynika, że

(A) $\Pr(Y = 0) = 0$

(B) Rozkład warunkowy zmiennej Y dla danego $X = x$ jest jednostajny na przedziale $[0, x]$

(C) $\Pr(Y = X) = \dfrac{1}{2}$

(D) $Y = \dfrac{X}{2}$

(E) $E(Y^2) \le \dfrac{1}{4}E(X^2)$

Wskazówka: Każdy rozkład prawdopodobieństwa na przedziale $[0, x]$ o wartości oczekiwanej $x/2$ ma wariancję nie przekraczającą $x^2/4$.

Zadanie 4.

Wybieramy losowo i niezależnie punkty P_1, P_2, P_3, P_4 z pewnego okręgu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że cięciwy P_1P_2 i P_3P_4 przecinają się.

(A) 3/4

(B) $\pi/8$

(C) 1/2

(D) 1/3

(E) $1/\pi$

Zadanie 5.

O zmiennych losowych X_0 i X_1 zakładamy, że: $E(X_0) = E(X_1) = 0$, $Var(X_0) = Var(X_1) = 1$ i $Cov(X_0, X_1) = \rho$, gdzie $0 < \rho < 1$. Niech

$$X_1 = \rho X_0 + W .$$

Rozważamy zmienne losowe postaci

$$\hat{W} = zX_1 + (1 - z)X_0 ,$$

interpretowane jako predyktory nieobserwowanej zmiennej W. Znaleźć współczynnik z_*, dla którego błąd średniokwadratowy

$$E\left(\hat{W} - W\right)^2$$

jest minimalny.

(A) $z_* = 1 + \frac{\rho}{2}$

(B) $z_* = 1 + \frac{\rho^2}{2}$

(C) $z_* = \frac{1}{2}$

(D) $z_* = 1$

(E) $z_* = 1 - \frac{\rho^2}{2}$

Zadanie 6.

Wykonujemy rzuty monetą aż do otrzymania po raz pierwszy sekwencji dwóch jednakowych wyników (tj. OO lub RR) w dwóch *kolejnych* rzutach. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

(A) 6

(B) 2

(C) 4

(D) 3

(E) 5

Zadanie 7.

Załóżmy, że $X_1,\ldots,X_n$ jest próbką z rozkładu normalnego $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ z nieznanymi parametrami. Rozważmy (nieobciążony) estymator wielkości μ^2 dany wzorem

$$\overline{\mu^2} = \left(\overline{X}\right)^2 - \frac{S^2}{n},$$

gdzie $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ i $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. Oblicz $Var\left(\overline{\mu^2}\right)$.

(A) $\frac{4}{n}\mu^2\sigma^2 + \frac{2}{n(n-1)}\sigma^2$

(B) $\frac{4}{n}\mu^2\sigma^2$

(C) $\frac{4}{n}\mu^2\sigma^2 + \frac{2}{n-1}\sigma^4$

(D) $\frac{4}{n}\mu^2\sigma^2 + \frac{2}{n(n-1)}\sigma^4$

(E) $\frac{4}{n^2}\mu^2\sigma^2 + \frac{2}{n(n-1)}\sigma^4$

Zadanie 8.

Załóżmy, że $X_1,...,X_n$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,1)$ z nieznanym parametrem μ i znaną wariancją $\sigma^2 = 1$. Znaleźć *najmniejsze* n, dla którego istnieje test hipotezy

$H_0 : \mu = 10.0$

przeciwko alternatywie

$H_1 : \mu = 10.1$

na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ o mocy przynajmniej 0.50.

(A) $n = 13$

(B) $n = 271$

(C) $n = 28$

(D) $n = 17$

(E) $n = 100$

Zadanie 9.

Załóżmy, że $X_1,...,X_6$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$ z nieznanymi parametrami. Zadanie polega na zbudowaniu jednostronnego przedziału ufności dla wariancji σ^2. Żądany poziom ufności jest równy $1-\alpha=0.99$. Rozpatrzmy dwie metody:

- **Metoda S** jest standardowa: budujemy przedział postaci $[0,G_S]$, gdzie $G_S=\frac{5S^2}{c}$, (S^2 oznacza nieobciążony estymator wariancji, zaś c jest odpowiednim kwantylem rozkładu χ^2).

- **Metoda N** polega na podziale próbki na dwie części. Podpróbkę X_1,X_2,X_3 wykorzystujemy do zbudowania przedziału ufności $[0,G_{123}]$, zaś podpróbkę X_4,X_5,X_6 - do zbudowania przedziału ufności $[0,G_{456}]$. Oba te przedziały obliczamy niezależnie, w standardowy sposób, *przyjmując poziom istotności* $1-\sqrt{\alpha}=0.90$. Ostatecznie, naszym przedziałem ufności jest

$$[0,G_N], \quad \text{gdzie} \quad G_N=\max\{G_{123},G_{456}\}.$$

Porównaj średnie długości przedziałów otrzymanych obiema metodami.

(A) $E(G_N)=1.93E(G_S)$

(B) $E(G_N)=0.93E(G_S)$

(C) $E(G_N)=E(G_S)$

(D) $E(G_N)=1.58E(G_S)$

(E) Stosunek $E(G_N)/E(G_S)$ zależy od nieznanej wariancji σ^2

Wskazówka: Jeśli W_1 i W_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, to $E\max\{W_1,W_2\}=1.5\,E(W_1)$.

Zadanie 10.

Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, X_2,\ldots$ są niezależne i mają jednakowy rozkład wykładniczy o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & dla \quad x > 0; \\ 0 \quad dla & x < 0. \end{cases}$$

Zmienne losowe $\overline{X}_1, \overline{X}_2,\ldots$ określamy wzorem

$$\overline{X}_i = \begin{cases} X_i - a \cdot E(X_i) & dla \quad X_i > a \cdot E(X_i); \\ 0 & dla \quad X_i \le a \cdot E(X_i). \end{cases}$$

Zmienna losowa N ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ i jest niezależna od $X_1, X_2,\ldots$.

Niech $$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \; ; \quad \overline{S} = \sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i \; .$$

Dobrać liczbę $a > 0$ tak, żeby $Var(\overline{S}) = 0.36\, Var(S)$.

(A) 2.000

(B) 0.1233

(C) 5.5300

(D) 1.0217

(E) 1.6094

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 stycznia 2002 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	E	
3	C	
4	D	
5	A	
6	D	
7	D	
8	B	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.