Zadanie 1.

Załóżmy, że X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$. Niech $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ będzie nieobciążonym estymatorem wariancji.

Oblicz $\Pr\left(S^2 \le \sigma^2\right)$.

(A) $\Pr\left(S^2 \le \sigma^2\right) = 0.36788$

(B) $\Pr\left(S^2 \le \sigma^2\right) = 0.5$

(C) $\Pr\left(S^2 \le \sigma^2\right) = 0.63212$

(D) $\Pr\left(S^2 \le \sigma^2\right) = 0.66667$

(E) $\Pr\left(S^2 \le \sigma^2\right) = 0.33333$

Zadanie 2.
W urnie znajduje się 10 kul, ponumerowanych liczbami 1,2,...,10. Losujemy *ze zwracaniem* 4-krotnie po jednej kuli. Niech S oznacza sumę numerów wylosowanych kul. Umawiamy się przy tym, że każdy wylosowany numer występuje w sumie tylko raz, (np. jeśli wylosowaliśmy kule o numerach 3,1,5,3, to $S = 3+1+5 = 9$).

Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej S.

(A) $E(S) = 11.$

(B) $E(S) = 15.5556$

(C) $E(S) = 20.$

(D) $E(S) = 22.$

(E) $E(S) = 18.9145$

Zadanie 3.
Wiadomo, że zmienna losowa X ma wykładniczy rozkład prawdopodobieństwa o gęstości $f(x) = e^{-x}$ $(x > 0)$, zaś Y jest taką zmienną losową, że dla każdego $x > 0$,

$$E(Y|X > x) = x + 2,$$

oraz iż moment drugiego rzędu zmiennej Y istnieje i jest liczbą skończoną.

Stąd wynika, że:

(A) $Cov(X,Y) = 1/\sqrt{2}$ i $Corr(X,Y) = 1/\sqrt{2}$

(B) $Cov(X,Y) = -\sqrt{2}$ i $Corr(X,Y) = -1/\sqrt{2}$

(C) $Cov(X,Y) = \sqrt{2}$ i $Corr(X,Y) = 1/2$

(D) Podane informacje nie wystarczają do obliczenia ani kowariancji, ani współczynnika korelacji.

(E) $Cov(X,Y) = 1$, zaś podane informacje nie wystarczają do obliczenia współczynnika korelacji.

Wskazówka: zastanów się czy można obliczyć $E(Y|X = x)$.

Zadanie 4.

Dana jest próbka $X_1,...,X_{10}$ z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$ z nieznanymi parametrami μ i σ^2. Rozważamy problem testowania hipotezy $H_0 : \mu = 0$ przeciw alternatywie $H_1 : \mu \neq 0$. Używamy testu, który odrzuca H_0 jeśli $|\overline{X}/V| > c$, gdzie

$$V^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 .$$

Dobierz stałą c tak, żeby prawdopodobieństwo błędu I rodzaju tego testu było równe $\alpha = 0.05$.

(A) $c = 0.2622$

(B) $c = 0.6021$

(C) $c = 0.7046$

(D) $c = 0.7427$

(E) Prawdopodobieństwo błędu I rodzaju tego testu zależy od nieznanego parametru σ^2 i nie istnieje liczba c dla której byłoby stale równe 0.05.

Zadanie 5.

Rozważamy łańcuch Markowa $X_1, X_2, \dots$ na przestrzeni stanów $\{1,2,3\}$ o macierzy przejścia

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 1-\beta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ dla $i, j = 1,2,3$). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem

$$\pi = \left[\frac{\beta}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta}, \frac{\alpha}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta}, \frac{\alpha - \alpha\beta}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta} \right],$$

(gdzie $\pi_i = \Pr(X_1 = i)$ dla $i = 1,2,3$).

Oblicz $p = \Pr(X_3 = 1 \mid X_2 \neq 1, X_1 \neq 1)$.

(A) $p = \beta / (2 - \beta)$

(B) $p = \beta / 2$

(C) $p = \beta$

(D) $p = \beta\alpha / (\beta + 2\alpha - \alpha\beta)$

(E) $p = \beta(1-\beta)\alpha / (\beta + 2\alpha - \alpha\beta)$

Zadanie 6.

Na podstawie próbki $X_1,\ldots,X_n$ z rozkładu wykładniczego o gęstości $f(x)=\theta e^{-\theta x}$ $(x>0)$, estymujemy parametr θ. Niech $\hat{\theta}=1/\overline{X}$.

Wyznaczyć w przybliżeniu rozmiar próbki n taki, żeby

$$\Pr\left(\frac{|\hat{\theta}-\theta|}{\theta}\le 0.01\right)\approx 0.95.$$

Posłużyć się aproksymacją rozkładem normalnym.

(A) $n\approx 400$

(B) $n\approx 10000$

(C) $n\approx 40000$

(D) $n\approx 2000$

(E) $n\approx 27000$

Zadanie 7.

Załóżmy, że $X_1,\dots,X_n$ jest próbką z rozkładu prawdopodobieństwa o dystrybuancie

$$F_\theta(x) = \Pr(X_i \le x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & dla \quad x \ge \theta; \\ 0 \quad dla & x < \theta; \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Rozważmy następujący estymator:

$$\hat{\theta} = \min(X_1,\dots,X_n).$$

Oblicz funkcję ryzyka tego estymatora:

$$R(\theta) = E_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2.$$

(A) $R(\theta) = \frac{1}{n}(1-e^{-\theta})^n$

(B) $R(\theta) = \frac{1}{n}e^{-n\theta}$

(C) $R(\theta) = \frac{1}{n^2}e^{-n\theta}$

(D) $R(\theta) = \frac{2}{n^2}e^{-n\theta}$

(E) $R(\theta) = \frac{2}{n^2}$

Zadanie 8.
Załóżmy, że X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ równą 5.

Obliczyć $v = \mathrm{var}(X_2 + X_3 \mid X_1 + X_2 = 5)$.

(A) $v = 10$

(B) $v = 5$

(C) $v = 7.5$

(D) $v = 6.25$

(E) $v = 15$

Zadanie 9.

Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o gęstości $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ ($x > 0$). Niech, dla dowolnej liczby a:

- $\lfloor a \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą niewiększą niż a;
- $\langle a \rangle = a - \lfloor a \rfloor$ oznacza „część ułamkową" liczby a.

Obliczyć $u = E(\langle X \rangle)$ w zależności od $c = E(\lfloor X \rfloor)$.

(A) $u = (\ln(c+1) - \ln c)^{-1} - c$

(B) $u = c/(2c+1)$

(C) $u = c - (\ln(c+1) - \ln c)^{-1}$

(D) $u = c/(c + \ln c)$

(E) $u = 1/2$

Zadanie 10.

Niech $X_1,...,X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$\Pr(X_i = 1) = 2/3 \text{ i } \Pr(X_i = -1) = 1/3.$$

Niech $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ dla $k = 1,2,...,10$.

Oblicz

$$r = \Pr(S_{10} = 2 \quad i \quad S_1 \le 5, S_2 \le 5, ..., S_{10} \le 5).$$

(A) $r = 0.1275$

(B) $r = 0.3128$

(C) $r = 0.2201$

(D) $r = 0.2276$

(E) $r = 0.2265$

Egzamin dla Aktuariuszy z 24 marca 2001 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	E	
3	E	
4	B	
5	B	
6	C	
7	D	
8	D	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.