Zadanie 1.
W ciągu 20 rzutów monetą liczymy serie 5 orłów. Każdy ciąg sąsiadujących ze sobą 5 orłów uznajemy za serię. Przyjmujemy zatem, że serie mogą „zachodzić na siebie”, na przykład w ciągu

R	O	O	O	O	O	O	O	R	O	O	O	R	O	O	O	O	O	R	R
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

mamy 4 serie, zaczynające się od miejsc 2, 3, 4 i 14.

Oblicz wartość oczekiwaną liczby serii 5 orłów w 20 rzutach.

(A) 2

(B) 20/32

(C) 1

(D) 20/16

(E) 1/2

Zadanie 2.
Na okręgu o obwodzie 1 wybieramy punkt X_0, a następnie losowo i niezależnie wybieramy punkty $X_1,\dots,X_n$. Niech Y oznacza odległość od X_0 do najbliższego spośród punktów $X_1,\dots,X_n$, liczoną wzdłuż okręgu. Obliczyć $E[Y]$.

(A) $E[Y]=\dfrac{1}{n+1}$.

(B) $E[Y]=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{n}$.

(C) $E[Y]=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1}$.

(D) $E[Y]=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

(E) $E[Y]=\dfrac{1}{4^n}$.

Zadanie 3.
Niech X i Y będą zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie normalnym takim, że $E[X] = E[Y] = 0$, $Var[X] = 1, Var[Y] = 5, Cov[X,Y] = -2$. Obliczyć $E[Y^2 \mid X = x]$.

(A) $E[Y^2 \mid X = x] = 5 + 4x^2$.

(B) $E[Y^2 \mid X = x] = 1 + 4x^2$.

(C) $E[Y^2 \mid X = x] = 1$.

(D) $E[Y^2 \mid X = x] = 5$.

(E) $E[Y^2 \mid X = x] = 4 + x^2$.

Wskazówka: Rozpatrz zmienną losową $Z = Y + 2X$.

Zadanie 4.
Niech $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Niech

$$Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n .$$

Która z następujących równości jest prawdziwa?

(A) $\lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n \le 1) = 0$.

(B) $\lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n \le 1) = 1/2$.

(C) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(Y_n \le (2/e)^n\right) = 0$.

(D) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(Y_n \le (2/e)^n\right) = 1/2$.

(E) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(Y_n \le (2/e)^n\right) = 1$.

Wskazówka: Wykorzystaj Centralne Twierdzenie Graniczne.

Zadanie 5.
Załóżmy, że X, Y i Z są niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Znaleźć liczbę a taką, że

$$\Pr\left(\frac{|X|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \le a\right) = 0.6.$$

(A) $a = 0.9785$.

(B) $a = 0.6$.

(C) $a = 0.565$.

(D) $a = 0.750$.

(E) $a = 0.825$.

Wskazówka 1: Wykorzystaj prosty wzór wyrażający $\Pr(Y^2 + Z^2 > t)$.
Wskazówka 2: Wykorzystaj geometryczną interpretację wetora $\dfrac{(X, Y, Z)}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.

Zadanie 6.
Niech $X_1,\dots X_{10}, X_{11},\dots, X_{20}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy tym $X_1,\dots X_{10}$ mają rozkład normalny $N(\mu_1,\sigma^2)$, zaś $X_{11},\dots, X_{20}$ mają rozkład normalny $N(\mu_2,\sigma^2)$. Niech

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i, \quad \overline{X}_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=11}^{20} X_i, \quad \overline{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i.$$

Dobrać liczby α i β tak, żeby statystyka

$$\hat{\sigma}^2 = \alpha\sum_{i=1}^{20}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \beta\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right)^2$$

była nieobciążonym estymatorem parametru σ^2.

(A) $\alpha = 1/19;\ \beta = -1/19$.

(B) $\alpha = 1/19;\ \beta = -5/19$.

(C) $\alpha = 1/18;\ \beta = -2/18$.

(D) $\alpha = 1/18;\ \beta = -5/18$.

(E) $\alpha = 1/18;\ \beta = 0$.

Zadanie 7.

$X_1,\ldots,X_n$ jest próbką z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1} & dla\ \ 0<x<1,\\ 0 & w\ przeciwnym\ \ przypadku.\end{cases}$$

Niech $\hat{\theta}$ będzie estymatorem największej wiarogodności nieznanego parametru θ. Obliczyć funkcję ryzyka tego estymatora, tzn. $R(\theta)=E_\theta\left((\theta-\hat{\theta})^2\right)$.

(A) $R(\theta)=\frac{1}{n}(\theta^2+2\theta)$

(B) $R(\theta)=\frac{1}{n\theta^2}$

(C) $R(\theta)=\frac{1}{\sqrt{n}}\theta$

(D) $R(\theta)=\frac{1}{n}\theta$

(E) $R(\theta)=\frac{1}{n}\theta^2$

Wskazówka: Można obliczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych $Y_i=-\ln X_i$.

Zadanie 8.
Niech X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 będzie próbką z rozkładu wykadniczego o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & dla\ x > 0, \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku. \end{cases}$$

Parametr θ jest nieznany. Wiadomo, że estymatorem największej wiarogodności tego parametru jest $\hat{\theta} = 5/S_5$, gdzie $S_5 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Należy zbudować przedział ufności dla parametru θ postaci

$$\left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right] = \left[\underline{a}/S_5, \overline{a}/S_5\right]$$

Żądamy, żeby ten przedział był symetryczny w tym sensie, że $\Pr\left(\theta < \underline{\theta}\right) = \Pr\left(\theta > \overline{\theta}\right)$. Wyznaczyć stałe $\underline{a}$ i $\overline{a}$ tak, żeby otrzymać przedział na poziomie ufności $1 - \alpha = 0.95$.

(A) $\underline{a} = 3.94$; $\overline{a} = 18.30$.

(B) $\underline{a} = -5\log 0.975$; $\overline{a} = -5\log 0.025$.

(C) $\underline{a} = 0.83$; $\overline{a} = 12.83$.

(D) $\underline{a} = 1.62$; $\overline{a} = 10.24$.

(E) $\underline{a} = 3.24$; $\overline{a} = 20.48$.

Wskazówka: Zmienna losowa S_5 ma rozkład Gamma.

Zadanie 9.

Urna zawiera r kul ponumerowanych liczbami $1,2,\dots,r$. Liczba kul r jest nieznanym parametrem, o którm wiemy, że jest większy od 5. Wybieramy z urny 5 kul, losując je *bez zwracania*. Na podstawie numerów wylosowanych kul testujemy hipotezę zerową

$$H_0 : r = 25$$

przeciwko alternatywie

$$H_1 : r = 48 .$$

Obliczyć moc najmocniejszego testu na poziomie istotności $\alpha = 0.2$. Z dokładnością do trzech cyfr po kropce dziesiętnej, moc jest równa

(A) 0.800

(B) 0.873

(C) 0.900

(D) 0.995

(E) 0.975

Wskazówka: Można skonstruować test najmocniejszy na podanym poziomie istotności, który wykorzystuje tylko *najwższy* numer wylosowanej kuli.

Zadanie 10.

Zmienna losowa X przyjmuje wartości 1 lub 2 z jednakowym prawdopodobieństwem ½. Zmienna losowa Y przyjmuje wartości $1,2,\ldots,k$. Dysponujemy próbką z łącznego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych X i Y, złożoną z n par obserwacji. Niech n_{ij} oznacza liczbę takich par, dla których zmienna X przyjęła wartość i, zaś Y - wartość j ($i=1,2;\quad j=1,2,\ldots,k$). W celu weryfikacji hipotezy o niezależności zmiennych X i Y, czyli hipotezy

$H_0 : \Pr(X=i, Y=j) = \frac{1}{2}\Pr(Y=j)$ dla $i=1,2;\quad j=1,2,\ldots,k$,

używamy statystyki

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(n_{ij} - n\hat{p}_j/2\right)^2}{n\hat{p}_j/2}, \text{ gdzie } \hat{p}_j = \frac{n_{1j}+n_{2j}}{n}.$$

Przy $n \to \infty$, rozkład tej statystyki zmierza do rozkładu chi-kwadrat z liczbą stopni swobody równą

(A) $2k-1$

(B) $k-1$

(C) k

(D) $2k$

(E) $2(k-1)$

Egzamin dla Aktuariuszy z 14 października 2000 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko: ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	C	
3	B	
4	D	
5	B	
6	D	
7	E	
8	D	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.