Zadanie 1.

Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem $p \in (0,1)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Definiujemy $Y = \max(X, 2)$. Ile wynosi $\mathbb{E}Y$?

$$\max(X,2) = \begin{cases} X, & X > 2 \\ 2, & X \leq 2 \end{cases}$$

$$EY = EX\mathbb{1}_{\{X>2\}} + 2E\mathbb{1}_{\{X\leq 2\}} = \sum_{k=3}^{\infty}\left(k(1-p)^{k-1}p\right) + 2P(X\leq 2) =$$

$$= \frac{1}{p} - 2(1-p)^1 p - 1(1-p)^0 p + 2(1-p)^0 p + 2(1-p)^1 p =$$

$$= \frac{1}{p} - \cancel{2(1-p)p} - p + 2p + \cancel{2(1-p)p} = \frac{1}{p} + p = \frac{1+p^2}{p}$$

Odp. D

Zadanie 2.

X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z wartościami oczekiwanymi $\mathbb{E}X_i = \dfrac{1}{(i+1)^2}, i = 1,2,3.$

Ile wynosi $\mathbb{P}(X_2 = \min(X_1, X_2, X_3))$?

$$P(X_2 = \min(X_1, X_2, X_3)) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

$$EX_1 = \frac{1}{4} \qquad \lambda_1 = 4$$

$$EX_2 = \frac{1}{9} \qquad \lambda_2 = 9$$

$$EX_3 = \frac{1}{16} \qquad \lambda_3 = 16$$

$$P(X_2 = \min(X_1, X_2, X_3)) = \frac{9}{4+9+16} = \frac{9}{29}$$

Zadanie 3.
Rzucamy niezależnie $n \geq 4$ razy kostką trójścienną (każda z trzech ścian może pojawić się z tym samym prawdopodobieństwem). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że któraś (którakolwiek) ze ścian nie pojawi się ani razu?

$|\Omega| = 3^n$

Z wzoru włączeń i wyłączeń:

$|A| = \binom{3}{1}2^n - \binom{3}{2}1^n = \binom{3}{1}2^n - \binom{3}{2} = 3 \cdot 2^n - 3$

$P = \frac{3 \cdot 2^n - 3}{3^n}$

Odp. A

Zadanie 4.

Wektor (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy^2 & \text{dla } x \le y, (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

dla pewnej stałej c. Ile wynosi $\Pr\left(X > \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{3}{4}\right)$?

$$f_Y(y) = \int_0^y cxy^2 \, dx = cy^2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{cy^4}{2}$$

$$f_{X|Y}(x) = \frac{\cancel{c}x\cancel{y^2}}{\frac{\cancel{c}y^{\cancel{4}\,2}}{2}} = \frac{2x}{y^2}$$

$$P(X > \tfrac{1}{2} \mid Y = \tfrac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{2x}{\frac{9}{16}} \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{32}{9} x \, dx = \frac{16}{9} x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{16}{9}\left(\frac{9}{16} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{9}$$

Odp. C

Zadanie 5.

Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = 0), i = 1, \ldots, 4$, gdzie $p \in (0,1)$. Testujemy hipotezę

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \qquad vs. \qquad H_1 : p = \frac{2}{3}$$

na poziomie istotności $\alpha = \frac{5}{16}$. Oznaczmy $S = \sum_{i=1}^{4} X_i$. Jednostajnie najmocniejszy test odrzuca hipotezę H_0, gdy

Odrzucamy hipotezę H_0 gdy statystyka testowa przekroczy próg k przy założeniu, że H_0 jest prawdziwa:

$$\alpha = P(S > k \mid H_0) = P(S > k \mid p = \tfrac{1}{2})$$

$$S \sim Bin(4, \tfrac{1}{2})$$

$$\frac{5}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left[\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\right]$$

Stąd $S > 2$

Odp. E

Zadanie 6.
Dwóch graczy, gracz A oraz gracz B rzucają po 200 razy symetryczną monetą. Gracz A wygrywa jeśli wyrzuci o 5 lub więcej orłów niż gracz B (w przeciwnym razie wygrywa gracz B). Ile wynosi w przybliżeniu (wynikającym z centralnego twierdzenia granicznego) prawdopodobieństwo tego, że wygra gracz A? Wskaż najbliższą odpowiedź.

$P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$

rozkłady Bernoulliego

$P(Y_i = 1) = P(Y_i = 0) = \frac{1}{2}$

z ctg:

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{200} \sim N(200 \cdot \frac{1}{2}, 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = N(100, 50)$

$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{200} \sim N(100, 50)$

$X - Y \sim N(0, 100)$

$P(X - Y \geqslant 5) = 1 - P(X - Y < 5) = 1 - P\left(\frac{X-Y}{10} < \frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) = 0{,}3085$

Odp. B

Zadanie 7.

Niech X_1, X_2, X_3 będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Znajdź najmniejszą liczbą α taką, żeby przedział

$$[\min(X_1, X_2, X_3), \alpha \cdot \min(X_1, X_2, X_3)]$$

był przedziałęm ufności parametru θ na porziomie istotności 0.729.

$$F_X(x) = \frac{x}{\theta}$$

$$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^3$$

$$P(\min(X_1, X_2, X_3) \leq \theta \leq c \cdot \min(X_1, X_2, X_3)) = 0{,}729$$

$$P\left(\min \leq \theta, \min \geq \frac{\theta}{c}\right) = 0{,}729$$

$$F(\theta) - F\left(\frac{\theta}{c}\right) = 1 - \left(1 - \frac{\theta}{\theta}\right)^3 - 1 + \left(1 - \frac{1}{c}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{c}\right)^3 = 0{,}729$$

$$1 - \frac{1}{c} = 0{,}9$$

$$\frac{1}{c} = 0{,}1$$

$$c = 10$$

Odp. C

Zadanie 8.

Zmienne losowe X i Y są niezależne. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku (0,1) a zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny na odcinku (0,2).

Zdefiniujmy: $Z = \frac{X}{X+Y}$. Ile wynosi $\Pr\left(Z \le \frac{3}{5}\right)$?

$$P(Z < z) = P\left(\frac{X}{X+Y} < z\right) = P(X < zX + zY) = P(X - zX < zY) =$$

$$= P\left(Y > \frac{X - zX}{z}\right) = \int_0^1 P\left(Y > \frac{X - zX}{z} \,\middle|\, X = x\right) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 P\left(Y > \frac{x - zx}{z}\right) f_X(x)\,dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} P\left(Y > \frac{x - zx}{z}\right) = 1 - P\left(Y < \frac{x - zx}{z}\right) = 1 - \frac{x - zx}{2z} \\ f_X(x) = 1 \end{array} \right|$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x - zx}{2z}\right) dx = 1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2z} x - \frac{1}{2} x\right) dx = 1 - \left(\frac{1}{2z} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{4z} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4z}$$

$$P\left(Z < \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

Odp. B

Zadanie 9.
Mówimy, że zmienna losowa T ma rozkład Geo(ρ) z parametrem $\rho \in (0,1)$ jeśli

$$\mathbb{P}(T = k) = (1-\rho)^{k-1}\rho, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Zmienna losowa X ma rozkład Geo(p), a zmienna losowa Y ma rozkład Geo(q), gdzie $p, q \in (0,1)$ oraz zmienne X i Y są niezależne.

Określmy $Z := \min(X,Y)$. Jakim wzorem wyraża się $\mathbb{E}Z$?

Wartość oczekiwana z dystrybuanty:

$$EZ = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z > k)$$

$$P(Z>k) = P(\min(X,Y) > k) = P(X>k)P(Y>k) = (1-p)^k(1-q)^k$$ dla $k \in \{1, 2, \ldots\}$

$$EZ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k(1-q)^k = 1 + \frac{(1-p)(1-q)}{1-(1-p)(1-q)} =$$

$$= \frac{1-(1-p)(1-q)+(1-p)(1-q)}{1-(1-q-p+pq)} = \frac{1}{q+p-pq}$$

Odp. E

Zadanie 10.

Mamy ciąg zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n, n \geq 4$ takich, że $\mathbb{E}X_i = 1 = \operatorname{Var} X_i = 1, i = 1, \ldots, n$ oraz $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = 1/2$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $I_1, \ldots, I_n$ o rozkładzie $\mathbb{P}(I_i = 0) = \mathbb{P}(I_i = 1) = 1/2$ są wzajemnie niezależne, a także są niezależne od ciągu $X_1, \ldots, X_n$.

Oblicz $Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i X_i\right)$.

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(I_i X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(I_i X_i, I_j X_j)$$

$$Var(I_i X_i) = EI_i^2 X_i^2 - (EI_i EX_i)^2 = EI_i^2 EX_i^2 - (EI_i EX_i)^2 =$$

$$\left| \begin{array}{ll} EI_i = \frac{1}{2} & EX_i = 1 \\ EI_i^2 = \frac{1}{2} & EX_i^2 = Var(X_i) + (EX_i)^2 = 1 + 1 = 2 \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$Cov(I_i X_i, I_j X_j) = EI_i I_j X_i X_j - EI_i X_i \cdot EI_j X_j =$$

$$= EI_i I_j (EX_i X_j - EX_i EX_j) = EI_i \cdot EI_j \cdot Cov(X_i, X_j) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i X_i\right) = \frac{3}{4} n + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \cdot \frac{1}{8} = \frac{6n}{8} + \frac{n^2 - n}{8} = \frac{n^2 + 5n}{8} = \frac{n(n+5)}{8}$$

Chyba błąd w odp.