Zadanie 1.

Rzucono (niezależnie) $n \geq 5$ razy monetą, w której prawdopodobieństwo orła wynosi $p \in (0,1)$. Wiadomo, że wypadła przynajmniej jedna reszka – niech Y oznacza sumaryczną liczbę orłów (zatem Y przyjmuje wartości $0,1,2,\ldots,n-1$). Ile wynosi $\mathbb{E}Y$?

Y – sumaryczna liczba orłów

X – liczba reszek

$$P(Y=k \mid X>0) = \frac{P(Y=k, X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(Y=k, X>0)}{1-P(X=0)}$$

$$P(X=0) = \binom{n}{0}(1-p)^0 p^n = p^n$$

$$P(Y=k, X>0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla } k=0,\ldots,n-1$$

$$P(Y=k \mid X>0) = \binom{n}{k} \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{1-p^n} \quad \text{dla } k=0,\ldots,n-1$$

$$EY = \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n}{k} \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{1-p^n} = \frac{1}{1-p^n} \sum_{k=0}^{n-1} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{1-p^n}\left[np - np^n\right] = \frac{np(1-p^{n-1})}{1-p^n}$$

Odp. E

Zadanie 2.

Dwie niezależne ciągłe zmienne losowe $X_k, k=1,2$ mają rozkłady ciągły o dystrybuantach

$$F_k(x) = 1 - e^{-k\exp(x+1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k=1,2.$$

Rozważmy zmienną losową

$$T = \frac{\exp(1+X_1)}{\exp(1+X_2)}.$$

Ile wynosi $P(T<1)$?

$$P(T<1) = P\left(\frac{\exp(1+X_1)}{\exp(1+X_2)} < 1\right) = P(\exp(1+X_1) < \exp(1+X_2)) =$$

$$= P(X_1 < X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_1 < x_2 \mid X_2 = x_2) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_1 < x_2) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 =$$

$$\left|\begin{array}{l} F_{X_1}(x_2) = 1 - e^{-\exp(x_2+1)} \\ F_{X_2}(x_2) = 1 - e^{-2\exp(x_2+1)} \\ f_{X_2}(x_2) = e^{-2\exp(x_2+1)} \cdot 2e^{x_2+1} \end{array}\right|$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - e^{-\exp(x_2+1)}\right] 2e^{x_2+1} e^{-2\exp(x_2+1)}\, dx_2 =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\exp(x_2+1)} 2e^{x_2+1} e^{-2\exp(x_2+1)}\, dx_2 =$$

$$= 1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-e^{x_2+1} + x_2 + 1 - 2e^{x_2+1}\}\, dx_2 =$$

$$= 1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{x_2 + 1 - 3e^{x_2+1}\}\, dx_2 =$$

$$= 1 - 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2} \cdot e \cdot \exp\{-3e^{x_2} \cdot e\}\, dx_2 = \left|\begin{array}{l} t = e^{x_2} \\ dt = e^{x_2}\, dx_2 \end{array}\right| =$$

$$= 1 - 2\int_0^{\infty} e^{1-3et} = 1 - 2\left.\frac{e^{1-3et}}{-3e}\right|_0^{\infty} = 1 - 2\left[0 + \frac{1}{3}\right] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Odp. B

Zadanie 3.

Wektor (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x\sqrt{y} & \text{dla } (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$\mathrm{Cov}(X, \min(X,Y))$ wynosi:

$$\mathrm{Cov}(X, \min(X,Y)) = EX\min(X,Y) - EX \cdot E\min(X,Y)$$

$$\min(X,Y) = \begin{cases} X, & X < Y \\ Y, & X > Y \end{cases}$$

$$EX\min(X,Y) = \int_0^1 \left[\int_0^y x^2 \cdot 3x\sqrt{y}\, dx + \int_y^1 xy \cdot 3x\sqrt{y}\, dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^y 3x^3\sqrt{y}\, dx + \int_y^1 3x^2 y\sqrt{y} \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{3x^4}{4}\sqrt{y}\,\Big|_0^y + \frac{3x^3}{3} y\sqrt{y}\,\Big|_y^1 \; dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{4} y^4\sqrt{y} + y\sqrt{y} - y^4\sqrt{y}\; dy =$$

$$= \int_0^1 y\sqrt{y} - \frac{1}{4} y^4\sqrt{y}\; dy =$$

$$= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} y^{\frac{9}{2}}\, dy =$$

$$= y^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{4} y^{\frac{11}{2}} \cdot \frac{2}{11}\,\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{39}{110}$$

$$E\min(X,Y) = \int_0^1 \left[\int_0^y x\, 3x\sqrt{y}\, dx + \int_y^1 y\; 3x\sqrt{y}\, dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^y 3x^2\sqrt{y}\, dx + \int_y^1 3xy\sqrt{y}\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \frac{3x^3}{3}\sqrt{y}\,\Big|_0^y + \frac{3}{2} x^2 y\sqrt{y}\,\Big|_y^1 \; dy =$$

$$= \int_0^1 y^3\sqrt{y} + \frac{3}{2} y\sqrt{y} - \frac{3}{2} y^3\sqrt{y} \; dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} y\sqrt{y} - \frac{1}{2} y^3\sqrt{y} \; dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} y^{\frac{7}{2}} \; dy =$$

$$= \frac{3}{2} y^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} y^{\frac{9}{2}} \cdot \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{22}{45}$$

$$EX = \int_0^1\int_0^1 3x^2\sqrt{y} \; dx\,dy = \int_0^1 \frac{3x^3}{3}\Big|_0^1 \sqrt{y} \; dy = \int_0^1 \sqrt{y} \; dy = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(X, \min(X, Y)) = \frac{39}{110} - \frac{2}{3} \cdot \frac{22}{45} = \frac{17}{594}$$

Odp. 0

Zadanie 4.

Niezależne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, n \geq 5$ pochodzą z rozkładu Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$, z parametrami $\alpha > 0, \beta > 0$, tzn. mają gęstość

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Z tej próbki oszacowano metodą momentów – przyrównując dwa pierwsze momenty – parametry rozkładu uzyskując $\hat{\alpha}$ oraz $\hat{\beta}$.

Użyto momentów centralnych, tj. porównano $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ oraz $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ do momentów teoretycznych.

Ile wynosi $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$?

$EX = \frac{\alpha}{\beta}$ $\quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \beta \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\cancel{\frac{1}{n}} \sum X_i = \beta \cancel{\frac{1}{n}} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_i}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum X_i \cdot \bar{X}}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \frac{\sum X_i + \bar{X}\sum X_i}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{n\bar{X} + n\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{n\bar{X}(1+\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Odp. E

Zadanie 5.

Zaobserwowano realizację niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ pochodzących z rozkładu dyskretnego przyjmującego wartości $\{0, 1, \ldots\}$. Wśród tych obserwacji 34 miały wartość 0, 38 miało wartość 1, a pozostałe miały wartości ≥ 2:

s	0	1	≥ 2
liczba obserwacji o wartości s	34	38	$n-72$

Za pomocą testu zgodności χ^2 testowano hipotezę, że ta n-elementowa próbka pochodzi z rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej 1. Jakie jest najmniejsze możliwe n jeśli wiadomo, że na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ nie znaleziono podstaw do odrzucenia hipotezy zgodności?

Statystyka:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$$

$$p_i = P(X=i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \frac{e^{-1}}{i!}$$

$$p_1 = e^{-1}$$

$$p_2 = e^{-1}$$

$$p_3 = 1 - 2e^{-1}$$

$$\chi^2 = \frac{(34 - ne^{-1})^2}{ne^{-1}} + \frac{(38 - ne^{-1})^2}{ne^{-1}} + \frac{(n - 72 - n + 2ne^{-1})^2}{n(1-2e^{-1})}$$

$$\chi^2_{0,05}(2) = 5,991$$

dla $n = 84$: $\chi^2 = 6,625$

dla $n = 85$: $\chi^2 = 5,672$

Odp. D

Zadanie 6.

Zmienna losowa X jest zdefiniowana następująco:

$$X = -\log\left[1-(1-e^{-1})U\right],$$

gdzie U ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$.
Ile wynosi $\mathbb{E}X^2$?

$$P(X<t) = P(-\ln[1-(1-e^{-1})U<t) = P(\ln[1-(1-e^{-1})U > -t) =$$

$$= P(1-(1-e^{-1})U > e^{-t}) = P(-(1-e^{-1})U > e^{-t}-1) =$$

$$= P((1-e^{-1})U < 1-e^{-t}) = P\left(U < \frac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}\right) = \frac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}$$

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{1}{1-e^{-1}} \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^2(-e^{-x})'\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int_0^1 x(-e^{-x})'\,dx =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int_0^1 e^{-x}\,dx =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1} + 1 = 2 - 5e^{-1}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{2-5e^{-1}}{1-e^{-1}}$$

Odp. D

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona ze średnią λ. Z obserwacji uzyskano

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0.27$$

Wiadomo też, że 95% przedział ufności (wyliczony z wykorzystaniem przybliżenia centralnym twierdzeniem granicznym) ma postać

$$[0.21908, 0.32092].$$

Ile wynosi n? Podaj najbliższą odpowiedź.

$$E[\hat{\lambda}] = \lambda$$

$$Var(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{n}$$

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} < \hat{\lambda} - \lambda < z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}\right) =$$

$$= P\left(-\hat{\lambda} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} < -\lambda < -\hat{\lambda} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}\right) =$$

$$= P\left(\hat{\lambda} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} < \lambda < \hat{\lambda} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}\right)$$

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}27}{n}} + 0{,}27 = 0{,}32092$$

$$1{,}96\sqrt{\frac{0{,}27}{n}} = 0{,}05092$$

$$\sqrt{\frac{0{,}27}{n}} = 0{,}02598$$

$$\frac{0{,}27}{n} = 0{,}00067$$

$$n = 400$$

Odp. C

Zadanie 8.

Zmienne losowe X i Y są niezależne o rozkładach wykładniczych, takich, że $\mathbb{E}X = 1, \mathbb{E}Y = \frac{1}{\lambda}$ dla pewnej $\lambda > 0$. Zdefiniujmy: $U = X, V = X + 2Y$. Wiadomo, że rozkład łączny wektora (U, V) jest następujący:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} e^{-v} & \text{dla } u < v, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ile wynosi λ?

$$\begin{cases} U = X \\ V = X + 2Y \end{cases} \qquad \begin{cases} X = U \\ Y = \frac{V-U}{2} \end{cases} \qquad |J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$f_X(x) = e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$$

$$f_{XY}(x,y) = \lambda e^{-\lambda y - x}$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda \cdot \frac{v-u}{2} - u}$$

$$\lambda = 2$$

$$f_{UV}(u,v) = e^{-v}$$

Odp. C

Zadanie 9.

Niech X_1, X_2, X_3 będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$ z nieznanym parametrem θ. Dla jakiej wartości c (najmniejszej) przedział

$$[\min(X_1, X_2, X_3), c \cdot \min(X_1, X_2, X_3)]$$

jest przedziałem ufności dla parametru θ na poziomie 0.729?

$F_X(x) = \frac{x}{\theta}$

$F(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^3$

$P(\min(X_1, X_2, X_3) \leq \theta \leq c \cdot \min(X_1, X_2, X_3)) = 0{,}729$

$P\left(\min \leq \theta, \ \min \geq \frac{\theta}{c}\right) = 0{,}729$

$F(\theta) - F\left(\frac{\theta}{c}\right) = 1 - \left(1 - \frac{\theta}{\theta}\right)^3 - 1 + \left(1 - \frac{1}{c}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{c}\right)^3 = 0{,}729$

$1 - \frac{1}{c} = 0{,}9$

$\frac{1}{c} = 0{,}1$

$c = 10$

Odp. D

Zadanie 10.

Niech $X_1, \ldots, X_n, n \geq 5$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Gamma$(3, \beta)$, tj. o gestości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta^3 x^2 e^{-\beta x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Konstruujemy estymator wariancji (tj. funkcji $g(\beta) = \frac{3}{\beta^2}$) postaci

$$\hat{g} = \alpha \cdot \mathrm{ENW}(g(\beta)),$$

gdzie ENW$(g(\beta))$ oznacza estymator największej wiarogodności funkcji g. Dla jakiego α estymator $\hat{g}$ jest nieobciążony?

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \beta^3 x_i^2 e^{-\beta x_i} = \frac{1}{2^n} \beta^{3n} \prod_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln = -n\ln(2) + 3n\ln(\beta) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\ln' = \frac{3n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} x_i := 0$$

$$\frac{3}{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad / ()^2$$

$$\frac{9}{\beta^2} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \quad /:3$$

$$\frac{3}{\beta^2} = \frac{1}{3n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$E\left[\frac{3}{\beta^2}\right] = \alpha E\left[\frac{1}{3n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \quad \Big| \; X_i \sim \Gamma(3,\beta) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(3n, \beta) \Big|$$

$$\frac{3}{\beta^2} = \alpha \frac{1}{3n^2}\left[\frac{3n}{\beta^2} + \left(\frac{3n}{\beta}\right)^2\right] = \alpha \frac{1}{3n^2}\left(\frac{3n + 9n^2}{\beta^2}\right)$$

$$3 = \alpha \cdot \frac{3n(1+3n)}{3n^2} = \alpha \cdot \frac{1+3n}{n}$$

$$\alpha = \frac{3n}{1+3n}$$