Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \ldots,$ będą wynikami niezależnych rzutów monetą, w której prawdopodobieństwo pojawienia się orła wynosi $P(X_i = O) = p$, a reszki $P(X_i = R) = 1 - p, p \in (0,1)$. Rzucamy monetą do czasu, aż pojawią się pod rząd dwie reszki (RR) – wówczas mówimy, że *przegraliśmy* – lub dwa orły (OO) – wówczas mówimy, że *wygraliśmy*.

Dla przykładu, jeśli wynikiem jest $ORORO\underline{RR}$ to przegraliśmy, jeśli wynikiem jest $ROR\underline{OO}$ to wygraliśmy.

Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

Niech W będzie zdaneniem takim, że wygrywam. Mogę zapisać zbiór W wypisując wszystkie sekwencje prowadzące do wygranej. Dla ułatwienia można podzielić zbiór na dwie części w zależności od wyniku pierwszego rzutu:

$$W = \{OO, OROO, OROROO, \ldots\} \cup \{ROO, ROROO, ROROROO, \ldots\}$$

Niech $q = 1 - p$

$$P(W) = P(\{OO, OROO, OROROO, \ldots\}) + P(\{ROO, ROROO, ROROROO, \ldots\}) =$$

$$= p^2 + p^3 q + p^4 q^2 + \ldots + p^2 q + p^3 q^2 + p^4 q^3 + \ldots =$$

$$= p^2 (1 + pq + (pq)^2 + (pq)^3 + \ldots) + p^2 q (1 + pq + (pq)^2 + (pq)^3 + \ldots) =$$

$$= p^2 (1+q)(1 + pq + (pq)^2 + (pq)^3 + \ldots) = |\text{ciąg geometryczny}| =$$

$$= \frac{p^2(1+q)}{1-pq} = \frac{p^2(2-p)}{1-p+p^2}$$

Odp. D

Zadanie 2.

Wektor losowy $(X_1,\dots,X_n)^T$, $n \geq 6$ ma wielowymiarowy rozkład normalny o średnich $EX_i = 0, i = 1,\dots,n$ oraz kowariancji:

$$Cov(X_i,X_j) = \begin{cases} 2 & \text{jeśli } i = j, \\ 1 & \text{jeśli } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Zdefiniujmy $Y = \sum_{k=1}^{n} k \cdot X_k$. Ile wynosi $VarY$?

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{k=1}^{n} k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(k X_k) + 2 \sum_{i<j} Cov(iX_i, jX_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 Var(X_k) + 2 \sum_{i<j} ij\, Cov(X_i, X_j) =$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 + i) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 2\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2\,\frac{(n-1)n}{2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[n(n+1)(2n+1) + n(n-1)(2n-1) + 3n(n-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} n \left[2n^2 + \cancel{n} + \cancel{2n} + 1 + 2n^2 - \cancel{n} - \cancel{2n} + 1 + 3n - 3\right] =$$

$$= \frac{1}{3} n (4n^2 + 3n - 1) = \frac{1}{3} n(n+1)(4n-1)$$

Odp. D

Zadanie 3.

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie standardowym normalnym $N(0,1)$. Zdefiniujmy

$$T = \frac{X^2}{X^2+Y^2}.$$

Gęstość $f_T(t)$ zmiennej losowej T dla $t \in (0,1)$ wyraża się wzorem:

$X \sim \text{gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$Y \sim \text{gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} T = \dfrac{X}{X+Y} \\ W = X+Y \end{cases} \qquad \begin{aligned} Y &= W - X = W - WT = W(1-T) \\ T &= \frac{X}{X+W-X} = \frac{X}{W} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X = WT \\ Y = W(1-T) \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} t & w \\ 1-t & -w \end{vmatrix} = -tw - w(1-t) = -tw - w + tw = -w$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x+y)}$$

$$f_{TW}(t,w) = \frac{1}{2\pi}(wt)^{-\frac{1}{2}}(w-wt)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(wt+w-wt)} \cdot w =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(wt)^{-\frac{1}{2}}(w-wt)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}w} w =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(t-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}w} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}w} \cdot \frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{1}{2}\right)^1 x^{1-1} e^{-\frac{1}{2}w} \cdot \frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}$$

Czyli zm. los. T ma rozkład Beta$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ o gęstości:

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$$

DRUGA METODA

$X^2 \sim \chi^2(1) \sim \text{gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$Y^2 \sim \chi^2(1) \sim \text{gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

zm. los. $T = \frac{X^2}{X^2+Y^2} \sim \text{Beta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Odp. A

Zadanie 4.

Dla nieujemnej ciągłej zmiennej losowej T definiujemy funkcję zwaną *intensywnością awarii* jako

$$r_T(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P(t < X < t+h | X > t), \qquad t > 0.$$

Podaj wzór na intensywność awarii $r_Y(t)$ zmiennej losowej $Y = \sqrt[3]{X}$, dla X o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$, tj. o gęstości $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ dla $x \geq 0$.

$$r_Y(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P(t < Y < t+h | Y > t) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P(t < \sqrt[3]{X} < t+h | \sqrt[3]{X} > t) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P(t^3 < X < (t+h)^3 | X > t^3) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{P(t^3 < X < (t+h)^3, t^3 < X)}{P(X > t^3)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{P(t^3 < X < (t+h)^3)}{1 - P(X < t^3)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{P(X < (t+h)^3) - P(X < t^3)}{1 - P(X < t^3)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{1 - e^{-\lambda(t+h)^3} - 1 + e^{-\lambda t^3}}{1 - 1 + e^{-\lambda t^3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{e^{-\lambda t^3} - e^{-\lambda(t+h)^3}}{e^{-\lambda t^3}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(1 - e^{-\lambda(t+h)^3 + \lambda t^3}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-e^{-\lambda(t+h)^3 + \lambda t^3} \cdot (-3\lambda(t+h)^2)}{1} = 3t^2\lambda$$

Zadanie 5.

Wektor losowy (X,Y) ma gęstość:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(1-xy^2) & \text{dla } (x,y) \in (0,1)^2, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wiadomo, że $E(Y|X=x_0) = 0.45$.

Ile wynosi x_0?

Podaj najbliższą odpowiedź.

$$f_X(x) = \frac{6}{5}\int_0^1 1 - xy^2 \, dy = \frac{6}{5}\left[y - \frac{xy^3}{3}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{x}{3}\right)$$

$$0{,}45 = E(Y|X=x_0) = \int_0^1 \frac{\frac{6}{5}(1-xy^2)y}{\frac{6}{5}(1-\frac{x}{3})} \, dy = \frac{3}{3-x}\int_0^1 y - xy^3 \, dy =$$

$$= \frac{3}{3-x}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{xy^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{3-x}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) = \frac{3}{3-x} \cdot \frac{2-x}{4}$$

$$0{,}75 \cdot \frac{2-x_0}{3-x_0} = 0{,}45$$

$$\frac{2-x_0}{3-x_0} = \frac{3}{5}$$

$$10 - 5x_0 = 9 - 3x_0$$

$$-2x_0 = -1$$

$$x_0 = 0{,}5$$

Odp. B

Zadanie 6.

Zaobserwowano niezależne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ pochodzące z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Dla $n = 11$ średnia próbkowa i wariancja próbkowa wyniosły odpowiednio

$$\hat{\mu} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} X_i = 9.42, \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{11}(X_i - \hat{\mu})^2 = 4.$$

Wyznaczono jednostronny przedział ufności $(0, \lambda)$ na poziomie 95% dla odchylenia standardowego σ.

Ile wynosi λ? Podaj najbliższą odpowiedź.

$$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{40}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$$

$$P\left(\chi^2_{0,95;10} < \frac{40}{\sigma^2}\right) = P\left(\sigma < \sqrt{\frac{40}{\chi^2_{0,95;10}}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{40}{3,94}} = 3,19$$

Odp. D

Zadanie 7.

Początkowo (w kroku nr 0) w urnie I znajdują się 3 białe kule, a w urnie II znajdują się dwie czarne kule. W jednym kroku dokonujemy następujących zmian:

i) losujemy jedną kulę z urny I i wkładamy ją do urny II,

ii) następnie losujemy jedną kulę z urny II i wkładamy ją do urny I.

Powtarzamy powyższe kroki wielokrotnie. Zauważmy, że po każdym kroku niezmiennie w urnie I są 3 kule, a w urnie II są 2 kule. Oznaczmy przez $p_k(I)$ prawdopodobieństwo tego, że po k krokach w urnie nr I znajduje się przynajmniej jedna czarna kula (dla przykładu, w kroku 0 na pewno nie ma tam czarnej kuli, zatem $p_0(I) = 0$).

Ile wynosi $\lim_{k\to\infty} p_k(I)$?

Rozważam zdarzenie przeciwne czyli po $k \to \infty$ krokach w urnie I nie ma żadnej czarnej kuli i odejmuję to p-stwo od 1. Rozkład hipergeometryczny:

$$1 - \frac{\binom{3}{3}\binom{5-3}{3-3}}{\binom{5}{3}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Odp. D

Zadanie 8.

Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 przyjmują wartości ze zbioru $\{1,2,3\}$, są niezależne o rozkładzie z parametrem $p \in (0,1)$:

$k:$	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}(1-p)$	$\frac{1}{4}(1+p)$

Ile wynosi $P(X_1 = 2 | X_1 + X_2 + X_3 = 8)$?

$$P(X_1 = 2 \mid X_1 + X_2 + X_3 = 8) = \frac{P(X_1 = 2, X_1 + X_2 + X_3 = 8)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = 8)} =$$

$$= \frac{P(X_1 = 2, X_2 + X_3 = 6)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = 8)} = \frac{P(X_1 = 2)\, P(X_2 + X_3 = 6)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = 8)} =$$

$P(X_2 + X_3 = 6) \Rightarrow (X_2, X_3) = (3,3)$
$P(X_1 + X_2 + X_3 = 8) \Rightarrow$
$(X_1, X_2, X_3) = (2,3,3) \vee (3,2,3) \vee (3,3,2)$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1+p) \cdot \frac{1}{4}(1+p) \cdot \frac{1}{4}(1+p)}{3 \cdot \left[\frac{1}{4}(1+p) \cdot \frac{1}{4}(1-p) \cdot \frac{1}{4}(1+p)\right]} = \frac{1}{3}$$

Odp. A

Zadanie 9.

Niezależne zmienne losowe $X_1,\ldots,X_5$ pochodzą z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta^3 x^2 e^{-\beta x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases},$$

gdzie $\beta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zaobserwowano $X_1 = x_1,\ldots,X_5 = x_5$. Testujemy hipotezę

$$H_0 : \sigma^2 = 3 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \sigma^2 = \frac{3}{4},$$

gdzie σ^2 oznacza wariancję zmiennej losowej $X_i, i = 1,\ldots,5$.

Obszar krytyczny testu na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ opartego na ilorazie wiarogodności jest postaci:

(A) $\left\{(x_1,\ldots,x_5) : \sum_{i=1}^{5} x_i < 21.886\right\}$

(B) $\left\{(x_1,\ldots,x_5) : \sum_{i=1}^{5} x_i < 9.246\right\}$

(C) $\left\{(x_1,\ldots,x_5) : \sum_{i=1}^{5} x_i < 8.590\right\}$

(D) $\left\{(x_1,\ldots,x_5) : \sum_{i=1}^{5} x_i < 7.261\right\}$

(E) Żadne z powyższych

Rozkład z treści zadania to rozkład gamma$(3, \beta)$

$H_0: \sigma^2 = 3 \Rightarrow \frac{3}{\beta^2} = 3 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow X_i \sim \text{gamma}(3, 1)$

$H_1: \sigma^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{\beta^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow X_i \sim \text{gamma}(3, 2)$

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{5} \cancel{\frac{1}{2}} 2^3 \cancel{x_i^2} e^{-2x_i}}{\prod_{i=1}^{5} \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{x_i^2} e^{-x_i}} = 2^{15} e^{-2\sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} x_i} = 2^{15} e^{-\sum_{i=1}^{5} x_i}$$

funkcja malejąca statystyki $\sum_{i=1}^{5} x_i$

$P_0\left(\sum_{i=1}^{5} x_i < k\right) = 0,05$

$\sum_{i=1}^{5} x_i \sim \text{gamma}(15, 1)$

$Y \sim \text{gamma}(15,1) \Rightarrow 2Y \sim \chi^2(30)$

$P_0\left(\sum_{i=1}^{5} X_i < k\right) = P_0\left(2\sum_{i=1}^{5} X_i < 2k\right) = P_0\left(\chi^2(30) < 2k\right) = 0,05$

$1 - P_0\left(\chi^2(30) > 2k\right) = 0,05$

$P_0\left(\chi^2(30) > 2k\right) = 0,95$

$2k = 18,493$

$k = 9,247$

Odp. B

Zadanie 10.

Dla dwóch niezależnych zmiennych losowych X,Y o rozkładzie $\mathcal{U}(0,2)$ jednostajnym na (0,2) definiujemy $U = \min(X,Y), V = \max(X,Y)$.

Ile wynosi $Cov(U,V)$?

$$U = \min(X,Y) = \begin{cases} X, & X < Y \\ Y, & X > Y \end{cases} \qquad V = \max(X,Y) = \begin{cases} Y, & X < Y \\ X, & X > Y \end{cases}$$

$$Cov(U,V) = EUV - EUEV$$

$$UV = XY$$

$$EUV = \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^2 xy \, dx\, dy = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{yx^2}{2}\Big|_0^2 dy = \frac{1}{4}\int_0^2 2y\, dy = \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 1$$

$$EU = \frac{1}{4}\int_0^2 \left[\int_0^y x\, dx + \int_y^2 y\, dx\right] dy = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^y + yx\Big|_y^2 \, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{y^2}{2} + 2y - y^2 \, dy = \frac{2}{3}$$

$$EV = \frac{1}{4}\int_0^2 \left[\int_0^y y\, dx + \int_y^2 x\, dx\right] dy = \frac{1}{4}\int_0^2 yx\Big|_0^y + \frac{x^2}{2}\Big|_y^2 \, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 y^2 + 2 - \frac{y^2}{2}\, dy = \frac{4}{3}$$

$$Cov(U,V) = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Odp. B