Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym o średniej 1 i wariancji $\sigma^2 > 0$. Niech $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Wiadomo, że

$$\mathrm{Var}\,(S_3 | S_{12} = 3) = 45.$$

Ile wynosi σ^2?

$S_3 \sim N(3, 3\sigma^2)$

$S_{12} \sim N(12, 12\sigma^2)$

$$\mathrm{Cov}(S_3, S_{12}) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{3} X_i, \sum_{i=1}^{12} X_i\right) = \mathrm{Cov}\left(X_1, \sum_{i=1}^{12} X_i\right) + \mathrm{Cov}\left(X_2, \sum_{i=1}^{12} X_i\right) +$$

$$+ \mathrm{Cov}\left(X_3, \sum_{i=1}^{12} X_i\right) = \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 = 3\sigma^2$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(S_3, S_{12})}{\sigma_3 \sigma_{12}} = \frac{3\sigma^2}{\sqrt{3\sigma^2} \cdot \sqrt{12\sigma^2}} = \frac{3\sigma^2}{6\sigma^2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(S_3 | S_{12} = 3) = (1 - \rho^2)\sigma_3^2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) 3\sigma^2$$

$$45 = \frac{9}{4}\sigma^2$$

$$\sigma^2 = 20$$

Zadanie 2.

Zmienna losowa Y ma rozkład geometryczny Geom(p), $p \in (0,1)$ na 0,1,..., tzn.

$$P(Y=k) = (1-p)^k p, k = 0,1,\dots$$

Warunkując $Y = y$, zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem μy, gdzie $\mu > 0$, tzn.

$$P(X=k|Y=y) = \frac{(\mu y)^k}{k!} e^{-\mu y}, k = 0,1,\dots$$

Ile wynosi Var(X)?

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(E[X|Y]) + E[\mathrm{Var}(X|Y)]$$

$$X|Y=y \sim P(\mu y)$$

$$E[X|Y] = \mu Y$$

$$\mathrm{Var}(E[X|Y]) = \mathrm{Var}(\mu Y) = \mu^2 \mathrm{Var}(Y) = \mu^2 \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mu Y$$

$$E[\mathrm{Var}(X|Y)] = E[\mu Y] = \mu EY = \mu \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\mu^2 - \mu^2 p}{p^2} + \frac{\mu p}{p^2} - \frac{\mu p^2}{p^2} = \frac{\mu(\mu - \mu p + p - p^2)}{p^2} = \frac{\mu[\mu(1-p) + p(1-p)]}{p^2} =$$

$$= \frac{\mu(1-p)(\mu+p)}{p^2}$$

Zadanie 3.
Zmienne losowe $X_1,\dots,X_n, n \geq 3$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3r^3}{x^4} & \text{dla } x \geq r \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

z nieznanym parametrem $r > 0$. Wiadomo, że

$$T = b \cdot \min(X_1,\dots,X_n)$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru r. Ile wynosi b?

$$F_X(x) = \int_r^x \frac{3r^3}{t^4}\,dt = \int_r^x 3r^3 t^{-4}\,dt = 3r^3 \frac{t^{-3}}{-3}\Big|_r^x = -\frac{r^3}{x^3} + \frac{r^3}{r^3} = 1 - \frac{r^3}{x^3} = 1 - r^3 x^{-3}$$

Dystrybuanta minimum:

$$F_T(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n = 1 - [1 - 1 + r^3 x^{-3}]^n = 1 - r^{3n} x^{-3n}$$

$$f_T(x) = -r^{3n}(-3n)x^{-3n-1} = 3n r^{3n} x^{-3n-1}$$

$$ET = \int_r^\infty 3nr^{3n} x^{-3n-1} x\,dx = 3nr^{3n}\int_r^\infty x^{-3n-1} x\,dx = 3nr^{3n}\int_r^\infty x^{-3n}\,dx =$$

$$= 3nr^{3n} \frac{x^{-3n+1}}{-3n+1}\Big|_r^\infty = -\frac{3nr^{3n}}{-3n+1} \cdot r^{-3n+1} = \frac{3n}{3n-1} \cdot r$$

$$r = b \cdot \frac{3n}{3n-1} \cdot r$$

$$b = \frac{3n-1}{3n}$$

INNA METODA OBLICZENIA ET

$$F_X(x) = 1 - r^3 x^{-3}, \quad x \geq r$$

$$F_X(x) = (1 - r^3 x^{-3})\,\mathbb{1}(x \geq r)$$

$$F_T(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n = 1 - [1 - (1 - r^3 x^{-3})\,\mathbb{1}(x \geq r)]^n$$

$$1 - F_T(x) = [1 - \mathbb{1}(x \geq r) + r^3 x^{-3}\,\mathbb{1}(x \geq r)]^n = [\mathbb{1}(x < r) + r^3 x^{-3}\,\mathbb{1}(x \geq r)]^n =$$

$$= \mathbb{1}(x<\nu) + \nu^{3n} x^{-3n} \mathbb{1}(x \geq \nu)$$

$$ET = \int_{\nu}^{\infty} \nu^{3n} x^{-3n}\, dx + \int_{0}^{\nu} dx = \nu^{3n} \frac{x^{-3n+1}}{1-3n} \Big|_{\nu}^{\infty} + x \Big|_{0}^{\nu} =$$

$$= \frac{\nu^{3n} \cdot \nu^{-3n+1}}{3n-1} + \nu = \frac{\nu}{3n-1} + \frac{\nu(3n-1)}{3n-1} = \frac{\nu + 3n\nu - \nu}{3n-1} =$$

$$= \frac{3n\nu}{3n-1}$$

Zadanie 4. Wiadomo, że zmienna losowa X ma następującą funkcję tworzącą momenty:

$$M_x(t) = \frac{1}{(1-5t)^2} \qquad \text{dla } t < 1/5.$$

Jaki jest współczynnik skośności, tj.

$$\mathbb{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$$

(gdzie μ jest średnią, a σ odchyleniem standardowym) tej zmiennej losowej?

$$M_X(t) = (1-5t)^{-2}$$

$$EX = M_X'(0) = -2(1-5t)^{-3}(-5) = 10(1-5t)^{-3} = 10$$

$$EX^2 = 150$$

$$EX^3 = 3000$$

$$Var(X) = 150 - 100 = 50$$

$$\sigma = 5\sqrt{2}$$

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{1}{(5\sqrt{2})^3} \cdot E(X-\mu)^3 = \frac{1}{250\sqrt{2}} \cdot E(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3) =$$

$$= \frac{1}{250\sqrt{2}} \cdot \left(EX^3 - 30EX^2 + 300EX - 1000\right) = \frac{500}{250\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Zadanie 5.

Zmienna losowa U ma rozkład $\mathcal{U}(0,1)$ (tj. jednostajny na (0,1)). Która z poniższych zmiennych losowych ma gęstość

$$f(x) = \frac{50^2}{(4+x)^5}, \quad \text{dla } x \geq 1 \text{ ?}$$

(A) $S = \dfrac{5}{\sqrt[6]{U}} - 4$

(B) $T = \dfrac{6}{\sqrt[5]{1-U}} - 5$

(C) $X = \dfrac{4}{\sqrt[4]{1-U}} - 3$

(D) $Y = \dfrac{5}{\sqrt[4]{U}} - 4$

(E) Żadne z powyższych

Odpowiedź D wygląda obiecująco:

$$P\left(\frac{5}{\sqrt[4]{U}} - 4 < x\right) = P\left(\frac{5}{\sqrt[4]{U}} < x+4\right) = P\left(\sqrt[4]{U} > \frac{5}{x+4}\right) = 1 - P\left(U < \frac{5^4}{(x+4)^4}\right) =$$

$$= 1 - \frac{5^4}{(x+4)^4}$$

$$f_X(x) = -\frac{-4 \cdot 5^4}{(x+4)^5} = \frac{50^2}{(x+4)^5}$$

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 3$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o średniej $\frac{1}{\theta} > 0$.

Wariancja tego rozkładu (funkcja parametru θ) wynosi $g(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$. Budujemy estymator tej wariancji postaci

$$\hat{g} = a \cdot \mathrm{ENW}(g(\theta)),$$

gdzie $\mathrm{ENW}(g(\theta))$ oznacza estymator największej wiarogodności funkcji g. Dla jakiego a estymator $\hat{g}$ jest nieobciążony?

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \qquad x \geq 0$$

$$L(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln(L) = n \ln(\theta) - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$(\ln(L))' = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i \quad := 0$$

$$\frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \implies \theta = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$g = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \qquad , Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n, \theta)$$

$$Eg = E\left(\frac{Y}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} EY^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\theta^2} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{\theta^2} \frac{(n+1)\cancel{n}\cancel{\Gamma(n)}}{\cancel{\Gamma(n)}} =$$

$$= \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{1}{\theta^2}$$

$$\frac{1}{\theta^2} = Q \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{1}{\theta^2}$$

$$Q = \frac{n}{n+1}$$

Zadanie 7.

Dla niezależnych zmiennych losowych X, Y o tym samym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 1 definiujemy

$$U = X + Y, \quad V = 2X - 2Y.$$

Ile wynosi $\mathbb{P}(0 \le U \le 5,\ 10 \le V \le 20)$?

$X \geq 0, \ Y \geq 0$

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = 2X - 2Y \end{cases} \quad \begin{cases} X = U - Y \\ V = 2(U - Y) - 2Y \end{cases} \quad \begin{cases} X = U - Y \\ V = 2U - 2Y - 2Y \end{cases} \quad \begin{cases} X = U - Y \\ V = 2U - 4Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = \frac{2U - V}{4} \\ X = \frac{4U}{4} - \frac{2U - V}{4} = \frac{2U + V}{4} \end{cases}$$

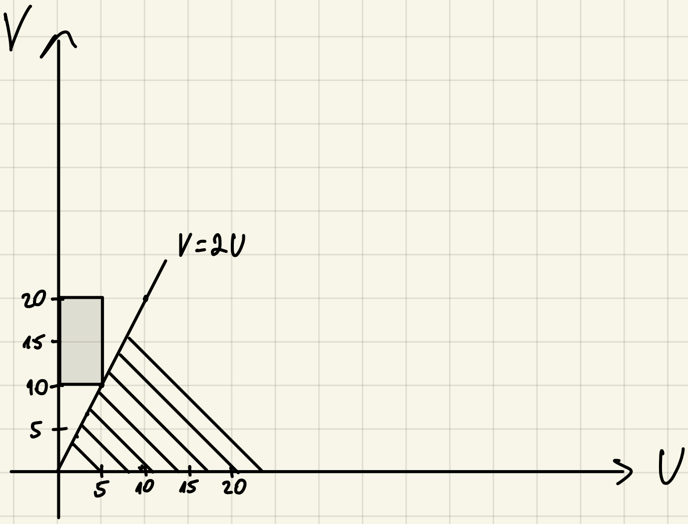
$$\begin{cases} \frac{2U - V}{4} > 0 \\ \frac{2U + V}{4} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2U - V > 0 \\ 2U + V > 0 \end{cases} /+ \qquad 4U > 0 \qquad \boxed{U > 0}$$

$2U > V$

$2U > -V$

$V < -2U$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 < V < 2U \\ U > 0 \end{matrix}}$$



Warunki są spełnione w zakreskowanym obszarze a mamy obliczyć P w obszarze zaznaczonym prostokątem stąd $P = 0$.

Zadanie 8.

Niech U_1, U_2 będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0,2)$. Zdefiniujmy $X = |U_1 - U_2|$.

Ile wynosi $\dfrac{\operatorname{Var} X}{\mathbb{E} X}$?

$$f_X(x) = \frac{1}{2}$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}$$

$$|u_1 - u_2| = \begin{cases} u_1 - u_2 & u_1 > u_2 \\ u_2 - u_1 & u_1 < u_2 \end{cases}$$

$$EX = E|U_1 - U_2| = \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^2 |u_1 - u_2|\, du_1\, du_2 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \left(\int_0^{u_1} u_1 - u_2 \, du_2 + \int_{u_1}^2 u_2 - u_1 \, du_2 \right) du_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 u_1 u_2 - \frac{u_2^2}{2}\Big|_0^{u_1} + \frac{u_2^2}{2} - u_1 u_2 \Big|_{u_1}^2 \, du_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 u_1^2 - \frac{u_1^2}{2} + \frac{4}{2} - 2u_1 - \frac{u_1^2}{2} + u_1^2 \, du_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 u_1^2 - 2u_1 + 2 \, du_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u_1^3}{3} - \frac{2u_1^2}{2} + 2u_1 \right)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} - 4 + 4 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

$$EX^2 = E(U_1 - U_2)^2 = E(U_1^2 - 2U_1U_2 + U_2^2) =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2} u_1^2 \, du_1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^2 u_1 u_2 \, du_1 \, du_2 + \int_0^2 \frac{1}{2} u_2^2 \, du_2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{u_1^3}{6}\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{u_1^2}{2} u_2 \Big|_0^2 \, du_2 =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{2}\int_0^2 2u_2 \, du_2 = \frac{8}{3} - \frac{u_2^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{Var(X)}{EX} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 9.
Niech $X_1, X_2, \ldots$ bedą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\beta > 0$ (tj. o średniej β^{-1}). Niech N będzie niezależną od tego ciągu zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda > 0$. Zdefiniujmy

$$M_N = \min\{X_1, \ldots, X_N\},$$

przyjmujemy $M_0 = 0$. Ile wynosi $Cov(N, M_N)$?

$$Cov(N, M_N) = E[NM_N] - EN\,EM_N$$

$$M_N = \min\{X_1, \ldots, X_N\} \sim Exp(N\beta)$$

$$M_N \mid N = n \sim Exp(n\beta)$$

$$E[NM_N] = \sum_{n=0}^{\infty} E[NM_N \mid N = n]\, P(N = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, E[M_N \mid N = n]\, P(N = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \left[\frac{1}{n\beta} \text{ gdy } n > 0 \text{ oraz } 0 \text{ gdy } n = 0\right] P(N = n) =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) = \frac{1}{\beta}\left(1 - P(N = 0)\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

$$E[M_N] = E[E[M_N \mid N]] = E\left[\frac{1}{N\beta}\right] = \frac{1}{\beta} E\left[\frac{1}{N}\right] =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad ?$$

Zadanie 10.

X jest pojedynczą obserwacją z populacji o gęstości

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad x \in (0,1),$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Testujemy hipotezę

$$H_0 : \theta = 3, \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 2.$$

Weryfikujemy tą hipotezę testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie $\alpha = 0.05$. Taki test odrzuca H_0, gdy $X < c$.

Ile wynosi c? Wskaż najbliższą odpowiedź.

$$P(X<c \mid H_0) = P(X<c \mid \theta=3) = \int_0^c 3x^{3-1}\,dx = 3\int_0^c x^2\,dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^c = x^3\Big|_0^c = c^3$$

$$c^3 = 0.05$$

$$c \approx 0.368$$