Zadanie 1.

Załóżmy, że chcemy wyestymować $\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx$ poprzez symulacje, dwoma metodami. Ustalmy $n \geq 3$.

- Metoda 1. Symulujemy niezależne zmienne losowe $U_{j,1}, U_{j,2}, \dots, U_{j,n}$, $j = 1, 2$ o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Estymator
$$\hat{Y}_a = \hat{Y}_1 - \hat{Y}_2,$$
gdzie
$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_{1,i}, \quad \hat{Y}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_{2,i}^2.$$
- Metoda 2. Symulujemy niezależne zmienne losowe $U_1, U_2, \dots, U_n$ o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Estymator
$$\hat{Y}_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (U_i - U_i^2).$$

W obu przypadkach mamy $E\hat{Y}_a = E\hat{Y}_b = 1/6$. Ile wynosi $\dfrac{Var(\hat{Y}_a)}{Var(\hat{Y}_b)}$?

$$Var(\hat{Y}_a) = Var(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_{1,i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_{2,i}^2\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n U_{1,i} - U_{2,i}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{n} Var(U_{1,i} - U_{2,i}^2)$$
$$Var(\hat{Y}_b) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (U_i - U_i^2)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(U_i - U_i^2) = \frac{1}{n} Var(U_i - U_i^2)$$
$$\frac{Var(\hat{Y}_a)}{Var(\hat{Y}_b)} = \frac{Var(U_{1,i} - U_{2,i}^2)}{Var(U_i - U_i^2)} = \frac{E(U_{1,i} - U_{2,i}^2)^2 - (E\hat{Y}_a)^2}{E(U_i - U_i^2)^2 - (E\hat{Y}_b)^2}$$

- $$\int_0^1\int_0^1 (u_1 - u_2^2)^2 \, du_1 du_2 = \int_0^1\int_0^1 u_1^2 - 2u_1u_2^2 + u_2^4 \, du_1 du_2 =$$
$$= \int_0^1 \frac{u_1^3}{3} - \cancel{2}u_2^2 \frac{u_1^2}{\cancel{2}} + u_2^4 u_1 \Big|_0^1 du_2 = \int_0^1 \frac{1}{3} - u_2^2 + u_2^4 \, du_2 =$$
$$= \frac{1}{3}u_2 - \frac{u_2^3}{3} + \frac{u_2^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$
- $$E\hat{Y}_b^2 = \int_0^1 (u - u^2)^2 \, du = \int_0^1 u^2 - 2u^3 + u^4 \, du =$$
$$= \frac{u^3}{3} - \cancel{2}\frac{u^4}{\cancel{4}_2} + \frac{u^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{Var(\hat{Y}_a)}{Var(\hat{Y}_b)} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{36}}{\frac{1}{30} - \frac{1}{36}} = 31$$

Zadanie 2.

Niech

$$X = 4\sqrt{-2\ln(1-U)}, \quad \text{gdzie } U \sim U(0,1).$$

Ile wynosi $\dfrac{EX^4}{EX^2}$?

$X^2 = 16(-2\ln(1-U)) = -32\ln(1-U)$

$1-U \sim U(0,1)$

$-32\ln(1-U) \sim Exp\left(\frac{1}{32}\right)$

$EX^2 = 32$

$X^4 = -1024\ln(1-U)^2 = -2048\ln(1-U)$

$EX^4 = 2048$

$\dfrac{EX^4}{EX^2} = 64$

Zadanie 3.

Niech $N \geq 7$. W urnie I umieszczono N białych, a w urnie II umieszczono N czarnych kul. Rozważmy następującą procedurę:

> W jednym kroku wybieramy losowo (tj. z rozkładem jednostajnym) kulę z pierwszej urny oraz, także losowo, kulę z drugiej urny (niezależnie). Następnie kule te są zamieniane.

Niech X_k oznacza liczbę kul czarnych w urnie I po wykonaniu k kroków powyższej procedury.

Ile wynosi $\rho(m) = \lim_{k\to\infty} P(X_k = m)$?

(A) $\rho(0)\binom{N}{m}, m = 1,\ldots,N$, gdzie $\rho(0) = \left[1+\sum_{i=1}^{N}\binom{N}{i}\right]^{-1}$.

(B) $\rho(0)\left(\frac{m}{N}\right)^2, m = 1,\ldots,N$, gdzie $\rho(0) = \left[1+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^2\right]^{-1}$.

(C) $\rho(0)\left(\frac{m}{N}\right), m = 1,\ldots,N$, gdzie $\rho(0) = \left[1+\sum_{i=1}^{N}\frac{i}{N}\right]^{-1}$.

(D) $\rho(0)\binom{N}{m}^2, m = 1,\ldots,N$, gdzie $\rho(0) = \left[1+\sum_{i=1}^{N}\binom{N}{i}^2\right]^{-1}$.

(E) Żadne z powyższych

Stany - liczba czarnych kul w I urnie $\{0, 1, ---, N\}$.

Ze stanu K możemy przejść do $\{K-1, K, K+1\}$ (o ile nie wychodzimy poza zakres)

Niech $K > 0$:

$P(\text{przejście z } K \text{ do } K-1) = P(\text{czarna z I i biała z II}) = P(\text{czarna z I}) \cdot$
$\cdot P(\text{biała z II}) = \frac{K}{N} \cdot \frac{K}{N} = \frac{K^2}{N^2}$

Niech $K < N$:

$P(\text{przejście z } K \text{ do } K+1) = P(\text{biała z I i czarna z II}) =$
$= \frac{N-K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} = \frac{(N-K)^2}{N^2}$

Niech $0 < K < N$:

$P(\text{pozostanie w } K) = 1 - \frac{K^2}{N^2} - \frac{(N-K)^2}{N^2} = \frac{2NK - 2K^2}{N^2}$

Niech ρ będzie rozkładem stacjonarnym, czyli dla każdego k:

$$\varrho(k) = \varrho(k-1)\frac{(N-k+1)^2}{N^2} + \varrho(k)\frac{2Nk-2k^2}{N^2} + \varrho(k+1)\frac{(k+1)^2}{N^2}$$

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że $\varrho(k) = \binom{N}{k}^2 \frac{1}{c}$, gdzie c - stała normująca spełniająca powyższe równanie. Stąd odpowiedź D.

Zadanie 4.

Wektor (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{y}} & \text{dla } (x,y) \in (0,1)^2, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$\mathrm{Cov}(X, \max(X,Y))$ wynosi:

$$\mathrm{cov}(X, \max(X,Y)) = E[X\max(X,Y)] - E[X]E[\max(X,Y)]$$

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & x > y \\ y & x < y \end{cases}$$

$$EX = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{y}}\,dy\,dx = \int_0^1 x^2 \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\,dy\,dx = \int_0^1 x^2 2y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E[\max(X,Y)] = \int_0^1\left(\int_0^x x\cdot\frac{x}{\sqrt{y}}\,dy + \int_x^1 \frac{yx}{\sqrt{y}}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^x x^2 y^{-\frac{1}{2}}\,dy + \int_x^1 x y^{\frac{1}{2}}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 2x^2 y^{\frac{1}{2}}\Big|_0^x + \frac{2}{3}xy^{\frac{3}{2}}\Big|_x^1\,dx =$$

$$= \int_0^1 2x^2 x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}xx^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 2x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3} x + \frac{4}{3} x^{\frac{5}{2}} \, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} x^{\frac{7}{2}} \cdot \frac{2}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{8}{21} = \frac{5}{7}$$

$$E[X \max(X,Y)] = \int_0^1 \left(\int_0^X x^3 y^{-\frac{1}{2}} \, dy + \int_X^1 x^2 y^{\frac{1}{2}} \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 2x^3 y^{\frac{1}{2}} \Big|_0^X + \frac{2}{3} X^2 y^{\frac{3}{2}} \Big|_X^1 \, dx =$$

$$= \int_0^1 2x^3 x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x^2 - \frac{2}{3} x^2 x^{\frac{3}{2}} \, dx =$$

$$= \int_0^1 2 x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} x^2 - \frac{2}{3} x^{\frac{7}{2}} \, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3} x^2 + \frac{4}{3} x^{\frac{7}{2}} \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} x^{\frac{9}{2}} \cdot \frac{2}{9} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{8}{27} = \frac{14}{27}$$

$$\mathrm{Cov}(X, \max(X,Y)) = \frac{14}{27} - \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{189}$$

Zadanie 5.

Niech Z_1, Z_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} X &= 1 + pZ_1, \\ Y &= q + Z_1 + \sqrt{3}Z_2. \end{aligned}$$

Wiadomo, że

$$E[X|Y=8] = 2, \qquad \mathrm{Var}[X|Y=7] = \frac{3}{4}.$$

Ile wynoszą parametry p i q?

$$X = \mu_X + \sigma_X Z_1$$

$$Y = \sigma_Y \rho Z_1 + \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}\, Z_2 + \mu_Y$$

$$\begin{cases} \sigma_Y \rho = 1 \\ \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_Y = \frac{1}{\rho} \\ \frac{1}{\rho}\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_Y = \frac{1}{\rho} \\ \frac{1-\rho^2}{\rho^2} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_Y = \frac{1}{\rho} \\ 1-\rho^2 = 3\rho^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_Y = \frac{1}{\rho} \\ 4\rho^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \frac{1}{2} \\ \sigma_Y = 2 \end{cases}$$

$$\mu_X = 1, \quad \sigma_X = p, \quad \mu_Y = q, \quad \sigma_Y = 2, \quad \rho = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} E[X|Y=8] = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(8-\mu_Y) = 2 \\ \mathrm{Var}(X|Y=7) = \sigma_X^2(1-\rho^2) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}(8-q) = 2 \\ p^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{4}p(8-q) = 1 \\ \frac{3}{4}p^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} p = 1 \\ 8-q = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = 4 \end{cases}$$

Zadanie 6.

Zakładamy, że miesięczna liczba szkód komunikacyjnych w pewnym mieście ma rozkład Poissona z parametrem θ (liczby szkód w różnych miesiącach są niezależnymi zmiennymi losowymi). Oznaczmy liczbę szkód w miesiącu i-tym przez X_i. Rozkład (a priori) parametru θ ma następującą gęstość:

$$p(\theta) = \frac{8}{3}\theta^3 e^{-2\theta}, \quad \theta \geq 0.$$

W ciągu pierwszych sześciu miesięcy wystąpiły następujące liczby szkód:

$$X_1 = 3,\ X_2 = 2,\ X_3 = 5,\ X_4 = 5,\ X_5 = 1,\ X_6 = 4.$$

Ile wynosi wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori* parametru θ, tj.

$$E(\theta | X_1 = 3,\ X_2 = 2,\ X_3 = 5,\ X_4 = 5,\ X_5 = 1,\ X_6 = 4)?$$

$p(\theta|X) = \dfrac{p(X|\theta)\,p(\theta)}{p(X)}$ - wzór Bayesa, $p(X|\theta)$ to iloczyn rozkładów Poissona bo $p(X_1,\dots,X_6|\theta) = p(X_1|\theta)\cdot\ldots\cdot p(X_6|\theta)$ ($X_1,\dots,X_6$ - niezależne):

$$p(\theta|X) = c \cdot \prod_{i=1}^{6} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} \cdot \frac{8}{3}\theta^3 e^{-2\theta} = c\, \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{6} x_i} e^{-6\theta}}{\prod_{i=1}^{6} x_i!} \cdot \frac{8}{3}\theta^3 e^{-2\theta}$$

Wszystkie składniki bez θ można wrzucić do stałej c.

$$p(\theta|X) = c\,\theta^{20} e^{-6\theta}\,\theta^3 e^{-2\theta} = c\,\theta^{23} e^{-8\theta}$$

Funkcja Γ: $\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} = \displaystyle\int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}\, d\theta$

$$\frac{1}{c} = \int_0^\infty \theta^{24-1} e^{-8\theta}\, d\theta = \frac{\Gamma(24)}{8^{24}}$$

nie trzeba tego liczyć bo od razu widać, że $p(\theta|X) \sim \Gamma(24,8)$

$$p(\theta|X) = \frac{8^{24}}{\Gamma(24)}\theta^{23} e^{-8\theta} \sim \Gamma(24,8)$$

$E[p(\theta|X)] = \dfrac{24}{8} = 3$ Wartość oczekiwana rozkładu gamma.

Zadanie 7.

Mówimy, że PIN składający się z 5 cyfr jest *poprawny* jeśli wszystkie cyfry są *różne*. Zatem zbiór poprawnych PINów to

$$\mathscr{E} = \{(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) : d_i \in \{0, \ldots, 9\}, i \in \{1, \ldots, 5\}, \forall (i \neq j,\ i, j \in \{1,2,3,4,5\})\ d_i \neq d_j\}.$$

Ze zbioru $\mathscr{E}$ wylosowano jednostajnie (i niezależnie od siebie) dwa PINy. Niech X oznacza liczbę cyfr, które występują w obu PINach.

Ile wynosi $Var(X)$?

Najlepiej policzyć pstwo dla każdej liczby powtarzających się cyfr w obu pinach:

0: p_0 - nie trzeba liczyć

1: $p_1 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \binom{5}{1} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{25}{252}$

2: $p_2 = \frac{\binom{5}{2} 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{25}{63}$

3: $p_3 = \frac{\binom{5}{3} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{25}{63}$

4: $p_4 = \frac{\binom{5}{4} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{25}{252}$

5: $p_5 = \frac{\binom{5}{5} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{252}$

$$EX = \frac{25}{252} + 2 \cdot \frac{25}{63} + 3 \cdot \frac{25}{63} + 4 \cdot \frac{25}{252} + 5 \cdot \frac{1}{252} = \frac{5}{2}$$

$$EX^2 = \frac{25}{252} + 4 \cdot \frac{25}{63} + 9 \cdot \frac{25}{63} + 16 \cdot \frac{25}{252} + 25 \cdot \frac{1}{252} = \frac{125}{18}$$

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{25}{36}$$

Zadanie 8.

Ustalmy $n \geq 7$. Wybierzmy podzbiór $X \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ losowo (jednostajnie – każdy podzbiór ma tą samą szansę zostania wybranym) , oznaczmy przez $|X|$ liczbę elementów zbioru X. Niech Y oznacza odwrotność $1+|X|$, tzn. $Y = \dfrac{1}{1+|X|}$.

Ile wynosi EY ?

Wszystkich podzbiorów – danego w zadaniu – zbioru jest 2^{n+1}. Wypiszę kilka wartości zmiennej Y i p-stwa:

$$X=0: \; Y=1 : \; p_0 = \frac{\binom{n+1}{0}}{2^{n+1}}$$

$$X=1: \; Y=\frac{1}{2} : \; p_1 = \frac{\binom{n+1}{1}}{2^{n+1}}$$

$$X=2: \; Y=\frac{1}{3} : \; p_2 = \frac{\binom{n+1}{2}}{2^{n+1}}$$

$$X=k: \; Y=\frac{1}{k+1} : \; p_k = \frac{\binom{n+1}{k}}{2^{n+1}}$$

$$EY = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\binom{n+1}{k}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+2} \cdot \frac{n+2}{k+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+1} =$$

$$= \frac{2^{n+2} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{n+2}}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - 1 - 1}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - 2}{(n+2)2^{n+1}}$$

Zadanie 9.

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie
$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/2, i = 1, \ldots, n$.
Dla tak wylosowanego ciągu niech Y oznacza liczbę maksymalnych podciągów złożonych z samych 0 lub 1. Dla przykładu, dla $(0,0,1,0,1,1,0,0,0)$ maksymalne podciągi to

$$(\underline{0,0}, \underline{1}, \underline{0}, \underline{1,1}, \underline{0,0,0}),$$

zatem $Y = 5$.

Wiadomo, że $EY = 51$. Ile wynosi n ?

Najlepiej rozważyć zmianę zera na jedynkę dla każdego losowania wtedy taka zmiana będzie opisana rozkładem zero-jedynkowym $\mathbb{1}(X_{i-1} \neq X_i)$.

Suma zm. z rozkładu zero-jedynkowego ma rozkład dwumianowy:

$$Y = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_{i-1} \neq X_i)$$

$$EY = 1 + \sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} \neq X_i) = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = 51$$

$$\frac{1}{2}(n-1) = 50$$

$$n = 101$$

Zadanie 10.

Niezależne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ pochodzą z rozkładu wykładniczego z parametrem λ o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{jeśli } x \geq 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Chcemy skonstruować estymator trzeciego momentu, tj. $\mu_3(\lambda) = EX_1^3 = \frac{6}{\lambda^3}$ postaci

$$\hat{\mu}_3 = \alpha MLE(\mu_3(\lambda)),$$

gdzie $MLE(\mu_3(\lambda))$ jest estymatorem największej wiarogodności funkcji $\mu_3(\lambda)$. Ile musi wynosić stała α, żeby estymator $\hat{\mu}_3$ był nieobciążony?

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$L(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$L(x_i;\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$L' = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i \quad := 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Teraz trzeba wyrazić λ w zależności od $\mu_3(\lambda) = \mu$:

$$\mu = \frac{6}{\lambda^3} \qquad \lambda^3 = \frac{6}{\mu}$$

$$\frac{6}{\mu} = \frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3}$$

$$\mu = \frac{6\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^3}{n^3}$$

$$\frac{6}{\lambda^3} = 6\alpha E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^3$$

Suma rozkładów wykładniczych pochodzi z rozkładu Gamma:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = Y \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

$$\frac{6}{\lambda^3} = \frac{6}{n^3}\alpha E[Y^3]$$

Momenty rozkładu Gamma to: $E[Y^k] = \frac{1}{\lambda^k} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$:

$$\frac{1}{\lambda^3} = \frac{\alpha}{n^3} \cdot \frac{1}{\lambda^3} \frac{\Gamma(n+3)}{\Gamma(n)}$$

$$1 = \frac{\alpha}{n^3} \cdot \frac{(n+2)(n+1)n\,\Gamma(n)}{\Gamma(n)}$$

$$1 = \frac{\alpha(n+2)(n+1)}{n^2}$$

$$\alpha = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}$$