Zadanie 1.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Zdefiniujmy

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Ile wynosi $\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}{\mathbb{E}(Y)}$?

(A) $\frac{4\sigma^2}{n^2}$

(B) $\frac{4\sigma^2}{n}$

(C) $\frac{2\sigma^4}{n-1}$

(D) $\frac{2\sigma^2}{n-1}$

(E) $\frac{2\sigma^2}{n}$

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 \underbrace{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}_{\chi^2 = \chi^2(n-1)}$$

$$EY = E\left[\frac{\sigma^2}{n}\chi^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} E\chi^2 = \frac{\sigma^2}{n}\cdot(n-1)$$

$$Var(Y) = Var\left(\frac{\sigma^2}{n}\chi^2\right) = \frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2(n-1)$$

$$\frac{Var(Y)}{E(Y)} = \frac{\frac{\sigma^4}{n^2}\,2\cancel{(n-1)}}{\frac{\sigma^2}{n}\cancel{(n-1)}} = \frac{2\sigma^4}{n^2}\cdot\frac{n}{\sigma^2} = \frac{2\sigma^2}{n}$$

E

Zadanie 2.

W pierwszym kroku, z odcinka $(0,\gamma)$ (gdzie $\gamma > 0$) wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_1. Następnie, w drugim kroku, z odcinka $(0,X_1)$ wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_2, a w trzecim kroku, z odcinka $(0,X_2)$ wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_3. Proces ten kontynuujemy w ten sam sposób. Wiadomo, że trzeci moment zmiennej X_5 wynosi 2048, tzn. $\mathbb{E}\left(X_5^3\right) = 2048$.

Określ wartość parametru γ.

(A) 32

(B) 64

(C) 128

(D) 256

(E) 512

$U_i \sim U(0,1)$ niezależne

$X_1 = \gamma U_1$

$X_2 = X_1 U_2 = \gamma U_1 U_2$

$\vdots$

$X_5 = \gamma U_1 U_2 U_3 U_4 U_5$

$EX_5^3 = 2048$

$E(\gamma U_1 U_2 U_3 U_4 U_5)^3 = \gamma^3 E(U_1^3 U_2^3 U_3^3 U_4^3 U_5^3) = \gamma^3 [EU_i^3]^5 = 2048$

$\gamma^3 \left[\int_0^1 u^3\, du\right]^5 = 2048$

$\gamma^3 \left[\frac{u^4}{4}\Big|_0^1\right]^5 = 2048$

$\gamma^3 \left[\frac{1}{4}\right]^5 = 2048$

$\gamma = 128$

C

Zadanie 3.

Wybieramy losowo punkt z górnej części okręgu jednostkowego w następujący sposób. Losujemy współrzędną $x \in (-1,1)$ z rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}(-1,1)$, a następnie wyznaczamy współrzędną y jako $y = \sqrt{1-x^2}$.
Oblicz średnią długość odcinka łączącego punkt $(-1,0)$ z wylosowanym punktem (x,y).

(A) $\frac{4}{\pi}$

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{4}{6}$

(E) $\frac{\pi}{3}$

Z - długość odcinka

$$Z = \sqrt{(-1-X)^2 + \left(0 - \sqrt{1-X^2}\right)^2} = \sqrt{1+2X+X^2+1-X^2} = \sqrt{2+2X}$$

$$EZ = \int_{-1}^{1} \sqrt{2+2x} \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{2+2x}\, dx = \left| \begin{matrix} t = 2+2x \\ dt = 2\,dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{4} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{4}\int_{0}^{4} t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{4} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$$

B

Zadanie 4.

Niech X_1, X_2 oraz X_3 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach jednostajnych

$$X_k \sim \mathcal{U}(0, 4-k), \quad k = 1, 2, 3.$$

Definiujemy zmienną $Y = \mathbf{1}(X_1 \leq X_2 \leq X_3)$.
Oblicz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}Y$.

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{1}{18}$

(C) $\frac{1}{36}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{1}{6}$

$X_1 \sim U(0,3)$

$X_2 \sim U(0,2)$

$X_3 \sim U(0,1)$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|X] f_X(x)\, dx$$

$$EY = E[\mathbb{1}(X_1 \leq X_2 \leq X_3)] = \int_0^1 E[\mathbb{1}(X_1 \leq X_2 \leq X_3) | X_1 = x_1] f_{X_1}(x_1)\, dx_1 = |\text{niezależność}| =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 E[\mathbb{1}(x_1 \leq X_2 \leq X_3)]\, dx_1$$

$$E[\mathbb{1}(x_1 \leq X_2 \leq X_3)] = \int_{x_1}^1 E[\mathbb{1}(x_1 \leq X_2 \leq X_3) | X_2 = x_2] f_{X_2}(x_2)\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_1}^1 E[\mathbb{1}(x_1 \leq x_2 \leq X_3)]\, dx_2$$

$$E[\mathbb{1}(x_1 \leq x_2 \leq X_3)] = P(x_2 \leq X_3) = \int_{x_2}^1 dx_3 = 1 - x_2$$

$$E[\mathbb{1}(x_1 \leq X_2 \leq X_3)] = \frac{1}{2} \int_{x_1}^1 1 - x_2\, dx_2 = \frac{1}{2}\left[x_2 - \frac{x_2^2}{2}\right]_{x_1}^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - x_1 + \frac{x_1^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - x_1 + \frac{x_1^2}{2}\right)$$

$$E[\mathbb{1}(X_1 \leq X_2 \leq X_3)] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} - x_1 + \frac{x_1^2}{2}\, dx_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36}$$

C

Zadanie 5.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$. Testujemy hipotezę zerową

$$H_0 : \sigma^2 = 2$$

przeciwko alternatywie

$$H_1 : \sigma^2 > 2.$$

Hipotezę H_0 odrzucamy, gdy

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 > c,$$

gdzie $\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$. Wyznacz wartość krytyczną c tak, aby rozmiar testu wynosił 0.05. Wskaż najbliższą odpowiedź.

(A) 18.307

(B) 33.838

(C) 3.940

(D) 36.614

(E) 7.880

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 > c \right\}$$

Rozmiar testu:

$$P_1(K) = 0,05$$

$$P_1\left(\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 > c \right) = 0,05$$

$$P_1\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2}_{\chi^2(9)} > \frac{c}{\sqrt{2}} \right) = 0,05$$

$$\chi^2_{0,05}(9) = 16,919$$

$$\frac{c}{2} = 16,919$$

$$c = 33,838$$

B

Zadanie 6.
Mamy dane dwa rozkłady prawdopodobieństwa na zbiorze $E = \{1, 2, \dots, n\}$, gdzie zakładamy, że $n \geq 4$ jest liczbą parzystą. Oznaczmy te rozkłady przez

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n).$$

Rozkłady te wyrażają się wzorami:

$$p_i = \frac{i}{c}, \qquad q_i = \frac{(n+1)-i}{c}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $c = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rozpatrzmy zbiór wszystkich dwuwymiarowych wektorów losowych (X,Y), takich, że brzegowo $X \sim \mathbf{p}$ oraz $Y \sim \mathbf{q}$, tj.

$$\mathcal{W} = \left\{ (X,Y) : \text{ t. że } \forall_{i \in E} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_i \text{ oraz } \forall_{j \in E} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = q_j \right\}$$

Ile wynosi

$$\inf_{(X,Y) \in \mathcal{W}} \mathbb{P}(X \neq Y)?$$

(A) $\frac{n}{2n+1}$

(B) $\frac{n}{2(n+1)}$

(C) $\frac{n}{2n-1}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{n}{n+1}$

Kiedy p-stwa są równe :

$$\frac{i}{c} = \frac{(n+1)-i}{c}$$

$$2i = n+1$$

$i = \frac{n+1}{2}$ n jest liczbą parzystą a i musi być całkowite stąd nie ma i, dla którego $p_i = q_i$

Dla $i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$ $p_i < q_i$

Dla $i \in \{\frac{n}{2}+1, \dots, n\}$ $q_i < p_i$

Trzeba wysumować przypadki gdy $p_i < q_i$ i $q_i < p_i$: | wyjaśnienie na końcu zadania |

$$\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} i = \frac{1}{c}\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)$$

$$\frac{1}{c}\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n}[(n+1)-i] = \frac{1}{c}\left[\frac{n}{2}(n+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1+n\right)\right] = \frac{1}{c}\cdot\frac{n}{2}\left[n+1-\frac{1}{2}\left(\frac{3n}{2}+1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{c}\cdot\frac{n}{2}\left[n+1-\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{c}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)$$

Sumy dają takie same wyniki więc:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{n}(n+1)}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}\left(1+\frac{n}{2}\right) = \frac{2+n}{2(n+1)}$$

$$\inf_{(X,Y)\in W} P(X\neq Y) = 1-\frac{2+n}{2(n+1)} = \frac{2n+2-2-n}{2(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)}$$

B

		Y: 1	2	
X	1	p_{11}	p_{12}	p_1
	2	p_{21}	p_{22}	p_2
		q_1	q_2	

Łatwiej policzyć $\inf_{(X,Y)\in W} P(X=Y)$, ponieważ p_1 to suma po wierszu $X=1$ to $P(X=1)$ wynosi maksymalnie p_1, mamy też drugie ograniczenie dla zm. Y, rozumowanie jest takie samo dlatego $P(Y=1)$ wynosi maksymalnie q_1. Stąd $\inf P(X=Y)$ to $\min(p_1, q_1)$, analogicznie dla kolejnych wartości zm. los.

Zadanie 7.

Wektor losowy (X,Y) ma następujący łączny rozkład:

$$P(X=0,Y=0)=\theta^2, \qquad P(X=0,Y=1)=\frac{\theta(1-\theta)}{2},$$

$$P(X=1,Y=0)=(1-\theta)^2, \qquad P(X=1,Y=1)=\frac{3}{2}\theta(1-\theta),$$

gdzie θ jest parametrem (który nie jest znany). Na podstawie próbki

$$(X_1,Y_1),\ \dots\ ,\ (X_n,Y_n)$$

skonstruowano i policzono $\hat{\theta}$ – estymator największej wiarogodności parametru θ.

Ile wynosi $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{\theta})$?

(A) $\frac{\theta(1-\theta)}{2n}$

(B) $\frac{\theta^2(1-\theta)^2}{n}$

(C) $\frac{\theta(1-\theta)}{4n}$

(D) $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$

(E) $\frac{\theta^2(1-\theta)^2}{2n}$

Liczba zliczeń poszczególnych kombinacji (nie znamy tych liczb więc to zm. los.):

$(X=0,\ Y=0)=n_1$

$(X=0,\ Y=1)=n_2$

$(X=1,\ Y=0)=n_3$

$(X=1,\ Y=1)=n-n_1-n_2-n_3$

$N=(n_1,n_2,n_3,n-n_1-n_2-n_3)$ ma rozkład wielomianowy $M(n;p_1,p_2,p_3,p_4)$

$$L=\theta^{2n_1}\cdot\left[\tfrac{1}{2}\theta(1-\theta)\right]^{n_2}\cdot(1-\theta)^{2n_3}\cdot\left[\tfrac{3}{2}\theta(1-\theta)\right]^{n-n_1-n_2-n_3}$$

$$\ln L=2n_1\ln\theta+n_2\ln\left[\tfrac{1}{2}\theta(1-\theta)\right]+2n_3\ln(1-\theta)+(n-n_1-n_2-n_3)\ln\left[\tfrac{3}{2}\theta(1-\theta)\right]$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{2n_1}{\theta}+\frac{n_2\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}(1-2\theta)}{\cancel{\tfrac{1}{2}}\theta(1-\theta)}-\frac{2n_3}{1-\theta}+\frac{(n-n_1-n_2-n_3)\cdot\cancel{\tfrac{3}{2}}(1-2\theta)}{\cancel{\tfrac{3}{2}}\theta(1-\theta)}=0$$

$$\frac{2n_1}{\theta}-\frac{2n_3}{1-\theta}+\frac{(1-2\theta)(n-n_1-n_3)}{\theta(1-\theta)}=0$$

$$\frac{2n_1(1-\theta)-2n_3\theta}{\theta(1-\theta)}+\frac{(1-2\theta)(n-n_1-n_3)}{\theta(1-\theta)}=0$$

$$\frac{2n_1-\cancel{2n_1\theta}-\cancel{2n_3\theta}+n-n_1-n_3-2n\theta+\cancel{2n_1\theta}+\cancel{2n_3\theta}}{\theta(1-\theta)}=0$$

$$\frac{n_1-n_3+n-2n\theta}{\theta(1-\theta)}=0$$

$$n_1-n_3+n=2n\theta$$

$$\hat{\theta}=\frac{n-n_3+n_1}{2n}$$

$$Var(\hat{\theta})=\frac{1}{4n^2}Var(n_1-n_3)=\frac{1}{4n^2}\left[Var(n_1)+Var(n_3)-2Cov(n_1,n_3)\right]=$$

$$=\frac{1}{4n^2}\left[Var(n_1)+Var(n_3)+Var(n_1)+Var(n_3)-Var(n_1+n_3)\right]=$$

$$=\frac{1}{4n^2}\left[2Var(n_1)+2Var(n_3)-Var(n_1+n_3)\right]$$

Jeśli $W_1=n_1+n_3 \quad W_2=n_2 \quad W_3=n-n_1-n_2-n_3$ to

$X=(W_1,W_2,W_3)\sim M(n;p_1+p_3,p_2,p_4)$

$$Var(n_1)=n\theta^2(1-\theta^2)=n(\theta^2-\theta^4)$$

$$Var(n_3)=n(1-\theta)^2\left[1-(1-\theta)^2\right]=n(1-2\theta+\theta^2)\left[1-(1-2\theta+\theta^2)\right]=$$

$$=n(1-2\theta+\theta^2)(2\theta-\theta^2)=n(2\theta-\theta^2-4\theta^2+2\theta^3+2\theta^3-\theta^4)=$$

$$=n(2\theta-5\theta^2+4\theta^3-\theta^4)$$

$$Var(n_1+n_3)=n\left[\theta^2+(1-\theta)^2\right]\left[1-\theta^2-(1-\theta)^2\right]=$$

$$=n(\theta^2+1-2\theta+\theta^2)(1-\theta^2-1+2\theta-\theta^2)=$$

$$=n(1-2\theta+2\theta^2)(2\theta-2\theta^2)=$$

$$=2n(1-2\theta+2\theta^2)(\theta-\theta^2)=$$

$$=2n(\theta-\theta^2-2\theta^2+2\theta^3+2\theta^3-2\theta^4)=$$

$$=2n(\theta-3\theta^2+4\theta^3-2\theta^4)$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{2n}\left(\theta^2 - \cancel{\theta^4} + 2\theta - 5\theta^2 + \cancel{4\theta^3} - \cancel{\theta^4} - \theta + 3\theta^2 - \cancel{4\theta^3} + \cancel{2\theta^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(\theta - \theta^2\right) = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}$$

A

Zadanie 8.

Niezależnie wykonano $n \geq 6$ rzutów monetą, przy czym prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $p \in (0,1)$. Niech $X_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\ldots,n$, gdzie $X_i = 1$ oznacza, że w i-tym rzucie wypadł orzeł, a $X_i = 0$, że wypadła reszka. Definiujemy zmienną $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, która oznacza łączną liczbę orłów uzyskanych w n rzutach. Oblicz wartość oczekiwaną Y pod warunkiem, że pierwszy i ostatni rzut były takie same, czyli znajdź $\mathbb{E}(Y \mid X_1 = X_n)$.

(A) $(n-2)p + \dfrac{2p^2}{(1-p)^2 + p^2}$

(B) $(n-2)p + \dfrac{2p}{(1-p)^2 + p^2}$

(C) $(n-2)p + \dfrac{2p^2}{(1-p)^2 + 2p^2}$

(D) $(n-1)p$

(E) $(n-2)p + 2p^2$

$Y - Bin(n,p) \qquad P(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$E[Y \mid X_1 = X_n] = E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n \mid X_1 = X_n] =$$

$$= E[X_2 + X_3 + \ldots + X_{n-1} + X_1 + X_n \mid X_1 = X_n] =$$

$$= E[X_2 + X_3 + \ldots + X_{n-1}] + E[X_1 + X_n \mid X_1 = X_n] =$$

$$= (n-2)p + E[X_1 + X_n \mid X_1 = X_n]$$

$$E[X_1 + X_n \mid X_1 = X_n] = \frac{E[X_1 + X_n, X_1 = X_n]}{P(X_1 = X_n)} = \left| \begin{array}{l} X_1 + X_n = 2 \Rightarrow p^2 \\ X_1 + X_n = 0 \Rightarrow (1-p)^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2p^2}{(1-p)^2 + p^2}$$

$$E[Y \mid X_1 = X_n] = (n-2)p + \frac{2p^2}{(1-p)^2 + p^2}$$

A

Zadanie 9.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Bezpośrednio obserwujemy jedynie połowę próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$, natomiast dodatkowo średnia całej próby $\bar{X}_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$ jest znana. Definiujemy estymator wariancji jako $T = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_{2n}\right)^2$.

Jakim wzorem wyraża się $\mathbb{E}T$?

(A) $\frac{n+1}{n}\sigma^2$

(B) $\frac{n}{n-1}\sigma^2$

(C) $\frac{n-1}{n}\sigma^2$

(D) $\frac{2n-1}{2(n-1)}\sigma^2$

(E) $\frac{2n-1}{2n}\sigma^2$

$$T = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_{2n})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X}_{2n} + \bar{X}_{2n}^2) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}_{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}_{2n}^2\right]$$

$$E\bar{X}_{2n}^2 = \frac{1}{4n^2}E\left[\sum_{i=1}^{2n}X_i\right]^2 = \left|\begin{array}{l} Y = \sum_{i=1}^{2n}X_i \\ Y \sim N(2n\mu, 2n\sigma^2)\end{array}\right| = \frac{1}{4n^2}EY^2 = \left|\begin{array}{l}\text{drugi moment} \\ \text{rozkładu } N\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{4n^2}(4n^2\mu^2 + 2n\sigma^2) = \mu^4 + \frac{\sigma^2}{2n}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n}EX_i^2 = n(\mu^2+\sigma^2) = n\mu^2 + n\sigma^2$$

$$E\left[\bar{X}_{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = E\left[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \frac{1}{2n}E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i + \sum_{i=n+1}^{2n}X_i\right)\sum_{i=1}^{n}X_i\right] =$$

$$= \frac{1}{2n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 + \frac{1}{2n}E\left[\sum_{i=n+1}^{2n}X_i\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \left|\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2n}(n^2\mu^2 + n\sigma^2) + \frac{1}{2n}n\mu\, n\mu = \frac{1}{2n}(n^2\mu^2 + n\sigma^2 + n^2\mu^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(2n\mu^2 + \sigma^2)$$

$$ET = \frac{1}{n-1}\left[n\mu^2 + n\sigma^2 - 2\cdot\frac{1}{2}(2n\mu^2+\sigma^2) + n\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{2n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\cancel{n\mu^2} + n\sigma^2 - \cancel{2n\mu^2} - \sigma^2 + \cancel{n\mu^2} + \frac{\sigma^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2 - \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2}\right] = \frac{\sigma^2}{n-1}\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{n-1}\left(\frac{2n-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2n-1}{2(n-1)}\sigma^2$$

D

Zadanie 10.

Niech (X,Y) będzie wektorem losowym o gęstości łącznej

$$f(x,y) = ce^{-(x+2y)}, \quad x > 0,\ y > 0,$$

gdzie c jest stałą normującą.

Która z poniższych procedur generuje wektor (X,Y) o takim rozkładzie?

(A) $X = -\ln(1-U), \quad Y = -\frac{1}{2}\ln(1-U)$, gdzie $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.

(B) $X = -\ln(U_1), \quad Y = -\ln(\sqrt{U_2})$, gdzie $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ są niezależne.

(C) $X = -\ln(U_1), \quad Y = -\ln\left(\frac{U_2}{2}\right)$, gdzie $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ są niezależne.

(D) $X = -\ln(U), \quad Y = -\ln(\sqrt{1-U})$, gdzie $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.

(E) $X = -\ln(1-U_1), \quad Y = -\ln\left(\frac{1-U_2}{2}\right)$, gdzie $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$ są niezależne.

Obserwacja : zm. są niezależne bo można je przedstawić w postaci :

$$f(x,y) = ce^{-x}e^{-2y}$$

$$f(x) = c_1 e^{-x} \Rightarrow 1 = c_1 \int_0^\infty e^{-x}\,dx \Rightarrow c_1 = 1$$

$$g(y) = c_2 e^{-2y} \Rightarrow 1 = c_2 \int_0^\infty e^{-2y}\,dy \Rightarrow c_2 = 2$$

$$F_X(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^x = 1 - e^{-x}$$

$$F_Y(y) = 2\int_0^y e^{-2t}\,dt = 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^y = 1 - e^{-2y}$$

$u_1 = 1 - e^{-x}$ | $u_2 = 1 - e^{-2y}$

$e^{-x} = 1 - u_1$ | $e^{-2y} = 1 - u_2$

$-x = \ln(1-u_1)$ | $-2y = \ln(1-u_2)$

$X = -\ln(1-U_1)$ | $Y = -\ln(\sqrt{1-U_2})$

$1 - U \sim U$

$X = -\ln(U_1)$

$Y = -\ln(\sqrt{U_2})$

B