Zadanie 1. Rzucamy 3 kości do gry (uczciwe). Prawdopodobieństwo zdarzenia iż otrzymamy dwie różne liczby oczek (jedna z nich wystąpi na jednej z kości, druga na dwóch pozostałych kościach) wynosi:

(A) $\frac{12}{36}$

(B) $\frac{15}{36}$

(C) $\frac{16}{36}$

(D) $\frac{18}{36}$

(E) $\frac{24}{36}$

$|\Omega| = 6^3 = 216$

$|A|$ - trójki postaci $(1,2,2), (1,3,3), \ldots$ jest ich $6 \cdot 5 \cdot 3$

$$P = \frac{3 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot 6^2} = \frac{15}{36}$$

B

Zadanie 2. Mamy 5 urn, a w każdej z nich po 4 kule. W pierwszej i drugiej urnie skład kul jest taki sam: 1 czarna i 3 białe. W trzeciej urnie są 2 czarne i 2 białe kule, w czwartej urnie 3 czarne i 1 biała, a w piątej urnie 4 czarne. Wykonujemy 3-etapowe doświadczenie:

- losujemy urnę (p-stwo wylosowania każdej z pięciu urn jest takie samo)
- z wylosowanej urny losujemy jedną kulę i odkładamy ją na bok
- z tej samej urny losujemy następną kulę

Prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli w trzecim etapie pod warunkiem, iż w drugim etapie wylosujemy kulę czarną wynosi:

(A) $\frac{11}{38}$

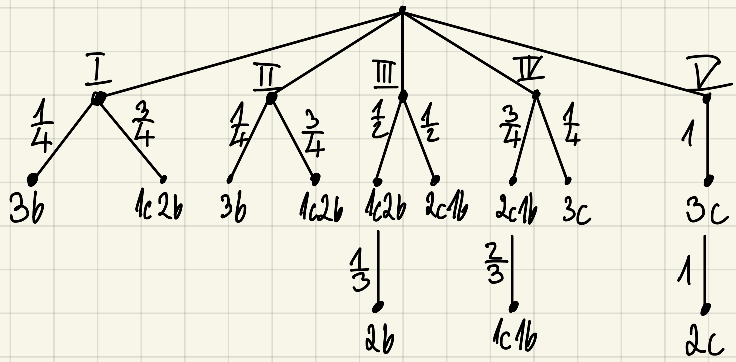
(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\frac{10}{19}$

(E) $\frac{20}{33}$

1c 3b	1c 3b	2c 2b	3c 1b	4c



I - pierwsze losowanie z urny

II - drugie losowanie z urny

$$P(c \text{ w } II \mid c \text{ w } I) = \sum_{i=1}^{5} P(c \text{ w } II \mid i) P(i \mid c \text{ w } I)$$

$$P(i \mid c \text{ w } I) = \frac{P(c \text{ w } I \mid i) P(i)}{P(c \text{ w } I)}$$

$$P(c \text{ w } I) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{11}{20}$$

$$P(3 \mid c \text{ w } I) = \frac{20}{11} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{11}$$

$$P(4 \mid c \text{ w } I) = \frac{20}{11} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{11}$$

$$P(5 \mid c\,w\,\mathrm{I}) = \frac{20}{11} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{11}$$

$$P(c\,w\,\mathrm{II} \mid c\,w\,\mathrm{I}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{11} + 1 \cdot \frac{4}{11} = \frac{20}{33}$$

E

Zadanie 3. Wiadomo, iż dla każdej zmiennej losowej X posiadającej skończone momenty do czwartego rzędu włącznie zachodzi nierówność:
$E\left[(X-EX)^4\right] \geq \left\{E\left[(X-EX)^2\right]\right\}^2$
Lewa strona tej nierówności równa jest prawej:

(A) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład zdegenerowany do jednego punktu

(B) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład dwupunktowy z prawdopodobieństwem w każdym z punktów równym 0.5

(C) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład dwupunktowy

(D) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład taki jak w odp.(B) lub jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładach takich jak w (B)

(E) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład taki jak w odp.(C) lub jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach takich jak w (C)

$\gamma_{kurtoza} = \dfrac{E[(X-EX)^4]}{\{E[(X-EX)^2]\}^2} = 1$ $\iff$ gdy X ma rozkład dwupunktowy z p-stwem w każdym z punktów równym 0,5

B

Zadanie 4. Zmienna losowa N ma rozkład dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \begin{cases} p_0 & dla \quad k = 0 \\ \frac{1-p_0}{e^\lambda - 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} & dla \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

gdzie parametry rozkładu $p_0 \in (0, 1)$ oraz $\lambda > 0$. Wartość oczekiwana tej zmiennej wynosi:

(A) $\lambda \cdot (1 - p_0) \cdot \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}$

(B) $\lambda \cdot (1 - p_0)$

(C) $\lambda \cdot \frac{1 - p_0 e^\lambda}{e^\lambda - 1}$

(D) $\frac{2\lambda - p_0}{e^\lambda - 1}$

(E) $\frac{2\lambda - p_0}{1 - e^{-\lambda}}$

$$EN = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-p_0}{e^\lambda - 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot k = \frac{1-p_0}{e^\lambda - 1} \cdot \frac{1}{e^{-\lambda}} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}_{= \lambda \text{ (z Poissona)}} = \frac{1-p_0}{1-e^{-\lambda}} \cdot \lambda$$

$$= \lambda(1-p_0) \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}$$

A

Zadanie 5. $(X_1, X_2, \dots, X_{20})$ jest prostą próbą losową z rozkładu normalnego o parametrach (μ, σ^2) równych $(10, 0.1^2)$. Jeśli wiadomo, że $\Pr(\max\{X_1, X_2, \dots, X_{20}\} \le a) = 0.99$, to liczba a wynosi:

(A) 14.653

(B) 10.329

(C) 13.291

(D) 16.581

(E) 10.233

$$P(\max(X_1, \dots, X_{20}) \le a) = 0{,}99$$

$$P(X_1 \le a, \dots, X_{20} \le a) = 0{,}99$$

$$P(X_1 \le a) \cdot \ldots \cdot P(X_{20} \le a) = 0{,}99$$

$$[P(X \le a)]^{20} = 0{,}99$$

$$P\left(\frac{X-10}{0{,}1} \le \frac{a-10}{0{,}1}\right) = \sqrt[20]{0{,}99}$$

$$\Phi\left(\frac{a-10}{0{,}1}\right) = \sqrt[20]{0{,}99}$$

$$\frac{a-10}{0{,}1} = \Phi^{-1}\left(\sqrt[20]{0{,}99}\right)$$

$$a = 0{,}1\,\Phi^{-1}\left(\sqrt[20]{0{,}99}\right) + 10$$

$$a = 10{,}329$$

B

Zadanie 6. Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Rozważmy zmienną losową równą bezwzględnej wartości różnicy pierwotnych zmiennych X_1 i X_2. Wartość oczekiwana μ oraz wariancja σ^2
zmiennej $|X_1 - X_2|$ wynoszą:

(A) $\mu = \frac{1}{3}$ $\sigma^2 = \frac{1}{18}$

(B) $\mu = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{12}$

(C) $\mu = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{24}$

(D) $\mu = \frac{1}{3}$ $\sigma^2 = \frac{1}{36}$

(E) $\mu = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{6}$

$$|X_1 - X_2| = \begin{cases} X_1 - X_2, & X_1 > X_2 \\ X_2 - X_1, & X_1 < X_2 \end{cases}$$

$$E|X_1 - X_2| = \int_0^1 \left[\int_0^{x_1} (x_1 - x_2)\,dx_2 + \int_{x_1}^1 (x_2 - x_1)\,dx_2 \right] dx_1 =$$

$$= \int_0^1 x_1 x_2 - \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^{x_1} + \frac{x_2^2}{2} - x_1 x_2 \Big|_{x_1}^1 \, dx_1 =$$

$$= \int_0^1 x_1^2 - \cancel{\frac{x_1^2}{2}} + \frac{1}{2} - x_1 - \cancel{\frac{x_1^2}{2}} + \cancel{x_1^2}\, dx_1 = \int_0^1 x_1^2 - x_1 + \frac{1}{2}\, dx_1 =$$

$$= \frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$E|X_1 - X_2|^2 = E(X_1 - X_2)^2 = EX_1^2 - 2EX_1X_2 + EX_2^2$$

$$EX_1^2 = EX_2^2 = Var(X_1) + (EX_1)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$EX_1X_2 = \int_0^1\int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 \frac{x_1^2}{2} x_2 \Big|_0^1 dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{2} x_2 \, dx_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$E|X_1 - X_2|^2 = \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$Var(|X_1 - X_2|) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{9-6}{54} = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$$

A

Zadanie 7. W pewnej populacji p-stwo tego, że osobnik przeżyje 1 rok jest równe $(1-\theta)$. Jeżeli osobnik przeżył 1 rok to (warunkowe) p-stwo tego, że przeżyje następny rok jest też równe $(1-\theta)$. W próbce losowej liczącej n osobników z tej populacji zanotowano:

- n_0 przypadków, kiedy osobnik nie przeżył 1 roku
- n_1 przypadków, kiedy osobnik przeżył 1 rok, ale nie przeżył 2-go roku
- n_2 przypadków, kiedy osobnik przeżył 2 lata

Estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ wyraża się wzorem:

(A) $\dfrac{n-n_0}{n}$

(B) $\dfrac{n-n_0}{n}+\dfrac{n_2}{n-n_0}$

(C) $\dfrac{n_0+n_1}{n+n_1+n_2}$

(D) $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{n-n_0}{n}+\dfrac{n_2}{n-n_0}\right)$

(E) $\dfrac{n_2}{n-n_0}$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n_0}\theta\cdot\prod_{i=1}^{n_1}(1-\theta)\theta\cdot\prod_{i=1}^{n_2}(1-\theta)(1-\theta)=\theta^{n_0}\left[(1-\theta)\theta\right]^{n_1}\left[(1-\theta)(1-\theta)\right]^{n_2}=$$

$$=\theta^{n_0+n_1}(1-\theta)^{n_1+2n_2}$$

$$\ln L(\theta)=(n_0+n_1)\ln\theta+(n_1+2n_2)\ln(1-\theta)$$

$$\ln' L(\theta)=\frac{n_0+n_1}{\theta}=\frac{n_1+2n_2}{1-\theta}$$

$$\frac{1-\theta}{\theta}=\frac{n_1+2n_2}{n_0+n_1}$$

$$\frac{1}{\theta}=\frac{n_1+2n_2}{n_0+n_1}+1=\frac{n_1+2n_2+n_0+n_1}{n_0+n_1}=\frac{n_0+2n_1+2n_2}{n_0+n_1}$$

$$\hat{\theta}=\frac{n_0+n_1}{n_0+2n_1+2n_2}=\frac{n_0+n_1}{n+n_1+n_2}$$

C

Zadanie 8. Niech $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie prostą próbą losową z rozkładu normalnego o nieznanych parametrach (μ, σ^2), i niech $n > 1$ oraz $\sigma^2 > 0$.

Przyjmijmy oznaczenia:

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- $t(\mu_0) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2}}$ dla pewnej ustalonej liczby μ_0
- t_α to dla zadanego poziomu istotności $\alpha \in (0,1)$ taka liczba, że $\Pr\left(\left|T_{n-1}\right| < t_\alpha\right) = \alpha$, gdzie T_{n-1} to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z $(n\text{-}1)$ stopniami swobody

Rozważmy estymator $\tilde{\mu}$ parametru μ postaci:

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu_0 & \textit{jeśli } \left|t(\mu_0)\right| < t_\alpha \\ \bar{X} & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

obciążenie tego estymatora:

$E(\tilde{\mu}) - \mu$

jest dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy:

(A) $\mu < \mu_0$ oraz $\left|t(\mu_0)\right| \geq t_\alpha$

(B) $\mu > \mu_0$ oraz $\left|t(\mu_0)\right| \geq t_\alpha$

(C) $\mu < \mu_0$ oraz $t(\mu_0) \geq t_\alpha$

(D) $\mu > \mu_0$

(E) $\mu < \mu_0$

$$E(\tilde{\mu}) = E\mu_0 \mathbb{1}(|t(\mu_0)| < t_\alpha) + E\bar{X}\mathbb{1}(|t(\mu_0)| > t_\alpha) =$$

$$= \mu_0 E\mathbb{1}(|t(\mu_0)| < t_\alpha) + E\bar{X}(1 - \mathbb{1}(|t(\mu_0)| < t_\alpha)) =$$

$$= \mu_0 P(|t(\mu_0)| < t_\alpha) + \mu - E\bar{X}\mathbb{1}(|t(\mu_0)| < t_\alpha)) = |\text{niezależność } T_n \text{ od } X_i| =$$

$$= \mu_0 P(|t(\mu_0)| < t_\alpha) + \mu - \mu P(|t(\mu_0)| < t_\alpha)$$

$$E(\hat{\mu}) - \mu = (\mu_0 - \mu)\underbrace{P(|t(\mu_0)| < t_\alpha)}_{\text{zawsze } > 0} > 0$$

$\mu < \mu_0$

E

Zadanie 9. Niech X będzie pojedynczą obserwacją z przesuniętego rozkładu wykładniczego o gęstości:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & dla \quad x \geq \theta \\ 0 & dla \quad x < \theta \end{cases}$$

gdzie $\theta \geq 0$ jest nieznanym parametrem.

Rozważamy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy:

$H_0 : \theta = 0$ przeciwko alternatywie: $H_1 : \theta > 0$, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Zbiór wszystkich tych wartości θ, dla których moc testu wynosi co najmniej 0.90, jest postaci:

(A) $[0, \ \ln 20 - \ln 10 + \ln 9]$

(B) $[\ln 20 - \ln 10, \ \infty)$

(C) $[0, \ \ln 20]$

(D) $[\ln 20 - \ln 10 + \ln 9, \ \infty)$

(E) $[\ln 20 + \ln 10 - \ln 9, \ \infty)$

$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$ dla $x \geq \theta$

$H_0 : \theta = 0$

$H_1 : \theta > 0$

$L(\theta) = e^{-(x-\theta)}$

$\ln L(\theta) = -x + \theta$

$\ln' L(\theta) = 1$

$\hat{\theta} = x$

$$\lambda = \frac{\sup L_1(\theta)}{\sup L_0(\theta)} = \frac{1}{e^{-x}} > C$$

$e^{x} > c$

$x > c$

$P_0(X > c) = 0,05$

$$\int_c^\infty e^{-x} = -e^{-x}\Big|_c^\infty = e^{-c} = 0,05$$

$-c = \ln(0,05)$

$c = -\ln(0,05) = \ln(20)$

$$P_1(X > \ln(20)) > 0{,}9$$

$$\int_{\ln(20)}^{\infty} e^{-x+\theta}\, dx = -e^{-x+\theta}\Big|_{\ln(20)}^{\infty} = e^{-\ln(20)+\theta} > 0{,}9$$

$$-\ln(20) + \theta > \ln 0{,}9$$

$$\theta > \ln(20) + \ln(9) - \ln(10)$$

$$\theta \in [\ln(20) + \ln(9) - \ln(10), \infty)$$

D

Zadanie 10. Mamy próbę prostą $((X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n))$ z rozkładu normalnego dwuwymiarowego o nieznanych parametrach:

$EX_i = EY_i = \mu, \quad VarX_i = VarY_i = \sigma^2, \quad Cov(X_i,Y_i) = \sigma^2 \cdot \rho.$

Niech $Z_i = X_i + Y_i$ oraz $R_i = X_i - Y_i$,

$$S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2, \qquad S_R^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2,$$

gdzie $\overline{Z}$ oraz $\overline{R}$ to odpowiednie średnie z próbki.

Niech ρ_0 będzie ustaloną liczbą z przedziału $(-1,\ 1)$, $\rho_0 \neq 0$.

Do testowania hipotezy $H_0\colon \rho = \rho_0$ przeciwko alternatywie $H_1\colon \rho \neq \rho_0$ możemy użyć testu o obszarze krytycznym postaci:

$$\frac{S_Z^2}{S_R^2} < k_1 \quad \text{lub} \quad \frac{S_Z^2}{S_R^2} > k_2.$$

(A) Statystyka $\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład $F(n-1,n-1)$

(B) Statystyka $\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\cdot\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład $F(n-1,n-1)$

(C) Statystyka $\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\cdot\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład $F(n-1,n-1)$

(D) Statystyka $\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\cdot\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład $F(n-2,n-2)$

(E) Nie istnieje taki współczynnik c, że statystyka $c\cdot\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład F Snedecora

$$Var(Z) = Var(X+Y) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2\sigma^2\rho = 2\sigma^2(1+\rho)$$

$$Var(R) = Var(X-Y) = \sigma^2 + \sigma^2 - 2\sigma^2\rho = 2\sigma^2(1-\rho)$$

$$X \sim \chi^2(d_1),\ Y \sim \chi^2(d_2),\ X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \frac{X/d_1}{Y/d_2} \sim F(d_1, d_2)$$

$$\frac{(n-1)S_Z^2}{2\sigma^2(1+\rho)} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S_R^2}{2\sigma^2(1-\rho)} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(1-\rho)\,S_Z^2}{(1+\rho)\,S_R^2} \sim F(n-1, n-1)$$

B