Zadanie 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dobrze potasowanej talii (52 kart) wszystkie 4 asy sąsiadują ze sobą (nie są rozdzielone innymi kartami)?

(A) $\binom{52}{4}^{-1}$

(B) $\binom{52}{3}^{-1}$

(C) $\frac{4}{52}$

(D) $\frac{4!}{52 \cdot 51 \cdot 50}$

(E) $\frac{1}{48!}$

$|\Omega| = 52!$

Traktuję 4 asy jako jedną grupę więc w talii mam 49 możliwości ich ułożenia

4! - możliwości ułożenia asów

48! - możliwości ułożenia pozostałych kart

$$p = \frac{4! \cdot 48! \cdot 49}{52!} = \frac{4!}{50 \cdot 51 \cdot 52}$$

D

Zadanie 2. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_8$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Znajdź najmniejszą liczbę c taką żeby przedział:
$[\max\{X_1, X_2, \ldots, X_8\}, \quad c \cdot \max\{X_1, X_2, \ldots, X_8\}]$
Był przedziałem ufności dla θ na poziomie 0.9375

(A) 2.0000

(B) 1.0667

(C) 1.4142

(D) 1.0625

1.1250

$$P(\max \le \theta, \ c\max \ge \theta) = 0,9375$$

$$P\left(\max \le \theta, \ \max \ge \frac{\theta}{c}\right) = 0,9375$$

$$P(\max \le t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^8$$

$$F(\theta) - F\left(\frac{\theta}{c}\right) = 1 - \left(\frac{1}{c}\right)^8 = 0,9375$$

$$\left(\frac{1}{c}\right)^8 = 1 - 0,9375$$

$$c = 1,4142$$

C

Zadanie 3. Niech N_1 i N_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi odpowiednio: $E(N_1)=20$, $E(N_2)=30$. $VAR(N_1|N_1+N_2=50)$ wynosi:

(A) 0

(B) 10

(C) 20

(D) 12

(E) 50

$N_1+N_2 \sim Poiss(50)$

$$P(N_1=k|N_1+N_2=50)=\frac{P(N_1=k \cap N_1+N_2=50)}{P(N_1+N_2=50)}=\frac{P(N_1=k \cap N_2=50-k)}{P(N_1+N_2=50)}=$$

$$=\frac{P(N_1=k)\,P(N_2=50-k)}{P(N_1+N_2=50)}=\frac{\frac{20^k}{k!}\cancel{e^{-20}}\,\frac{30^{50-k}}{(50-k)!}\cancel{e^{-30}}}{\frac{50^{50}}{50!}\cancel{e^{-50}}}=\frac{20^k\cdot 30^{50-k}}{50^{50}}\cdot\frac{50!}{k!(50-k)!}=$$

$$=\binom{50}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{50}=\binom{50}{k}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{50}=\binom{50}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{50-k}\sim Bin\left(50,\frac{2}{5}\right)$$

$$Var(N_1|N_1+N_2=50)=50\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=12$$

D

Zadanie 4. Rozpatrzmy zmienne losowe X i Y o łącznym rozkładzie normalnym. Wiadomo, że:

$VAR(Y) = 9$

$E(Y|X) = \frac{1}{2}X + 7$

$VAR(Y|X) = 8$

Wobec tego $COV(X,Y)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) 2

(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$Var(Y|X) = \sigma_Y^2 (1-\rho^2) = 8$$

$$9(1-\rho^2) = 8$$

$$1-\rho^2 = \frac{8}{9}$$

$$-\rho^2 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$\rho^2 = \frac{1}{9}$$

$$\rho = \frac{1}{3}$$

$$Var(Y) = Var(E[Y|X]) + E[Var(Y|X)] = Var(\tfrac{1}{2}X + 7) + E[8] = \tfrac{1}{4}Var(X) + 8$$

$$\frac{1}{4}\sigma_X^2 + 8 = 9$$

$$\sigma_X^2 = 4$$

$$\sigma_X = 2$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 = 2$$

C

Zadanie 5. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(0, 2^2)$.
Rozważmy najmocniejszy test hipotezy:
$H_0: \quad \mu = 0$ przeciw alternatywie:
$H_1: \quad \mu = 1$,
na poziomie istotności $\alpha = 0.01$. Ile obserwacji potrzeba (jak duże musi być n), żeby moc testu była większa niż 0.9?

(A) Potrzeba przynajmniej $n = 75$ obserwacji

(B) Potrzeba przynajmniej $n = 14$ obserwacji

(C) Potrzeba przynajmniej $n = 100$ obserwacji

(D) Wystarczą $n = 4$ obserwacje

(E) Potrzeba przynajmniej $n = 53$ obserwacji

$X_i \sim N(\mu, 4)$

$H_0: \mu = 0$

$H_1: \mu = 1$

$$L_0(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{8}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

$$L_1(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-1)^2}{8}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2\right)$$

$$\lambda(\mu) = \frac{L_1(\mu)}{L_0(\mu)} = \exp\left(-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i + 1) + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) > k$$

$$\cancel{-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{8} + \cancel{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} > k \quad / \cdot 4$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > k + \frac{n}{2}$$

$$P_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{n}{2} + k\right) = 0{,}01$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = Y \sim N(0, 4n)$$

$$1 - P_0\left(\frac{Y}{2\sqrt{n}} < \frac{\frac{n}{2}+k}{2\sqrt{n}}\right) = 0{,}01$$

$$1 - \Phi\left(\frac{\frac{n}{2}+k}{2\sqrt{n}}\right) = 0{,}01$$

$$\frac{\frac{n}{2}+k}{2\sqrt{n}} = \Phi^{-1}(0,99)$$

$$\frac{n}{2}+k = 2\sqrt{n}\,\Phi^{-1}(0,99)$$

$$k = 2\sqrt{n}\,\Phi^{-1}(0,99) - \frac{n}{2}$$

$$moc = P_1\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{n}{2}+k\right) > 0,9$$

$$P_1\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 2\sqrt{n}\,\Phi^{-1}(0,99)\right) > 0,9$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = Y \sim N(n, 4n)$$

$$1 - P_1\left(\frac{Y-n}{2\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{n}\,\Phi^{-1}(0,99) - n}{2\sqrt{n}}\right) > 0,9$$

$$\Phi^{-1}(0,99) - \frac{n}{2\sqrt{n}} < \Phi^{-1}(0,1)$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2} > \Phi^{-1}(0,99) - \Phi^{-1}(0,1)$$

$$\sqrt{n} > 2\left(\Phi^{-1}(0,99) - \Phi^{-1}(0,1)\right)$$

$$\sqrt{n} > 7,2158$$

$$n > 52,07$$

E

Zadanie 6. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y+x} & dla \quad 0<x<1 \quad i \quad y>x \\ 0 & w \text{ } przeciwnym \text{ } przypadku \end{cases}$$

Wartość oczekiwana $E(X+Y)$ jest równa:

(A) $e = 2.718.....$

(B) 1.5

(C) 0.5

(D) 1

(E) 2

$$E(X+Y)=\int_0^1\int_x^\infty (x+y)e^{-y+x}\,dy\,dx=\int_0^1\int_x^\infty xe^{-y+x}+ye^{-y+x}\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\left[-xe^{-y+x}+\int_x^\infty y(-e^{-y+x})'\,dy\right]_x^\infty dx=\int_0^1\left[-xe^{-y+x}-ye^{-y+x}-e^{-y+x}\right]_x^\infty dx=$$

$$=\int_0^1 x+x+1\,dx=\int_0^1 2x+1\,dx=\frac{2x^2}{2}+x\Big|_0^1=1+1=2$$

E

Zadanie 7. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie geometrycznym:

$f_\theta(x) = \Pr_\theta(X = x) = \theta^x \cdot (1-\theta) \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$

Załóżmy, że nieznany parametr θ jest realizacją zmiennej losowej Θ, która ma gęstość (*a priori*):

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 3\theta^2 & dla \quad 0 < \theta < 1 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Wartość Bayes'owskiego estymatora parametru θ obliczona na podstawie zaobserwowanej wartości $X = 0$, czyli $E(\Theta | X = 0)$ wynosi:

(A) 0.1

(B) 0.2

(C) 0.6

(D) 0.5

(E) 0.8

$$f(\theta|X=0) = \frac{f(X=0|\theta)f(\theta)}{P(X=0)} = c \cdot (1-\theta)3\theta^2 = c(1-\theta)\theta^2$$ | Musi sumować się do 1 |

$$\int_0^1 c(1-\theta)\theta^2 \, d\theta = c\int_0^1 \theta^2 - \theta^3 \, d\theta = c\left[\frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^4}{4}\right]_0^1 = c\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] =$$

$$= c\,\frac{1}{12} \implies c = 12$$

$$f(\theta|X=0) = 12(1-\theta)\theta^2$$

$$E[\theta|X=0] = 12\int_0^1 (1-\theta)\theta^3 \, d\theta = 12\int_0^1 \theta^3 - \theta^4 \, d\theta = 12\left[\frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^5}{5}\right]_0^1 =$$

$$= 12\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right] = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

C

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \dots, X_8, X_9$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy tym gęstość X_i jest dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & dla \quad x > 0 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases} \qquad dla \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Zmienna X_9 ma inny rozkład, o gęstości:

$$g(x) = \begin{cases} \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x} & dla \quad x > 0 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Estymator największej wiarygodności nieznanego parametru λ ma postać:

(A) $\hat{\lambda} = \dfrac{9}{\sum_{i=1}^{9} X_i}$

(B) $\hat{\lambda} = \left(\sum_{i=1}^{8} X_i + \frac{1}{2} \cdot X_9 \right)^{-1}$

(C) $\hat{\lambda} = \left(\frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^{8} X_i + \frac{1}{2} \cdot X_9 \right)^{-1}$

(D) $\hat{\lambda} = \dfrac{10}{\sum_{i=1}^{9} X_i}$

(E) $\hat{\lambda} = \left(\frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^{8} X_i + X_9 \right)^{-1}$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{8} \lambda e^{-\lambda x_i} \cdot \lambda^2 x_9 e^{-\lambda x_9} = \lambda^8 e^{-\lambda \sum_{i=1}^{8} x_i} \cdot \lambda^2 x_9 e^{-\lambda x_9}$$

$$\ln L(\lambda) = 10 \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{8} x_i + \ln x_9 - \lambda x_9$$

$$\ln' L(\lambda) = \frac{10}{\lambda} - \sum_{i=1}^{8} x_i - x_9 = 0$$

$$\frac{10}{\lambda} = \sum_{i=1}^{9} x_i$$

$$\hat{\lambda} = \frac{10}{\sum_{i=1}^{9} x_i}$$

D

Zadanie 9. Niech $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ będzie próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, zaś $x_{26}, x_{27}, \dots, x_{50}$ - próbą losową z rozkładu $N(\nu, \tau^2)$, gdzie μ, ν, σ, τ są nieznanymi parametrami. Wiemy, że:

$$\bar{x}_{25} = \frac{1}{25} \cdot \sum_{i=1}^{25} x_i = 10.4$$

$$\bar{x}_{50} = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^{50} x_i = 10.0$$

$$s_{25}^2 = \frac{1}{24} \cdot \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x}_{25})^2 = 3.333,$$

$$s_{50}^2 = \frac{1}{49} \cdot \sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x}_{50})^2 = 2.000.$$

Czy na podstawie tych danych można policzyć wartość nieobciążonego estymatora $\hat{\tau}^2$ wariancji τ^2?

(A) TAK, $\hat{\tau}^2 = 1.333$

(B) TAK, $\hat{\tau}^2 = 0.400$

(C) TAK, $\hat{\tau}^2 = 2.666$

(D) TAK, $\hat{\tau}^2 = 0.417$

(E) NIE

$$L(\tau^2) = \prod_{i=1}^{25} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \prod_{i=26}^{50} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\nu)^2}{2\tau^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{25} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{25}(x_i-\mu)^2\right) \left(\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\right)^{25} \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=26}^{50}(x_i-\nu)^2\right)$$

$$\ln L(\tau^2) = -25\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{25}(x_i-\mu)^2 - 25\ln(\tau) - 25\ln(\sqrt{2\pi}) -$$

$$- \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=26}^{50}(x_i-\nu)^2$$

$$\ln' L(\tau^2) = -\frac{25}{\tau} + \frac{1}{\tau^3}\sum_{i=26}^{50}(x_i-\nu)^2 = 0$$

$$\frac{1}{\tau^3}\sum_{i=26}^{50}(x_i-\nu)^2 = \frac{25}{\tau} \quad \Big| \cdot \tau^3$$

$$\sum_{i=26}^{50}(x_i-\nu)^2 = 25\tau^2$$

ν jest nieznane więc wstawiam estymator: $\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=26}^{50} x_i$

$$\sum_{i=26}^{50} (X_i - \bar{X})^2 = 25 \tau^2$$

$$\sum_{i=26}^{50} X_i^2 - 25 \bar{X}^2 = 25 \tau^2 \qquad \bar{X} \sim N\left(\nu, \frac{\tau^2}{25}\right)$$

Obciążenie :

$$\frac{1}{25} \sum_{i=26}^{50} E X_i^2 - E \bar{X}^2 = \nu^2 + \tau^2 - \left(\nu^2 + \frac{\tau^2}{25}\right) = \frac{24}{25} \tau^2 \Rightarrow c = \frac{25}{24}$$

$$\frac{1}{24} \left[\sum_{i=26}^{50} X_i^2 - 25 \left(\frac{(x_{26} + \ldots + x_{50})}{25} \right)^2 \right] = \tau^2$$

$$x_1 + \ldots + x_{25} = 25 \cdot 10{,}4 = 260$$

$$x_1 + \ldots + x_{50} = 50 \cdot 10 = 500$$

$$x_1^2 + \ldots + x_{25}^2 - 25 \bar{x}_{25}^2 = 24 \cdot 3{,}333 = 79{,}992$$

$$x_1^2 + \ldots + x_{50}^2 - 50 \bar{x}_{50}^2 = 49 \cdot 2 = 98$$

$$x_{26} + \ldots + x_{50} = 500 - 260 = 240$$

$$x_{26}^2 + \ldots + x_{50}^2 = (x_1^2 + \ldots + x_{50}^2) - (x_1^2 + \ldots + x_{25}^2) =$$

$$= 98 + \frac{500^2}{50} - 79{,}992 - \frac{260^2}{25} = 2314{,}008$$

$$\tau^2 = \frac{1}{24}\left(2314{,}008 - \frac{240^2}{25}\right) = 0{,}417$$

D

Zadanie 10. W urnie I znajdują się dwie kule i w urnie II znajdują się dwie kule. Na te cztery kule w sumie składają się dwie kule białe i dwie czarne. Przeprowadzamy następujące doświadczenie losowe:

a) najpierw losujemy jedną kulę z urny I i przekładamy ją do urny II,
b) następnie losujemy jedną kulę z urny II i przekładamy ją do urny I.

Sekwencję dwóch losowań a) i b) powtarzamy wielokrotnie. Przed każdym losowaniem dokładnie mieszamy kule w urnie. Niech $p_n(1)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że po n powtórzeniach (czyli po $2n$ losowaniach) w urnie I znajduje się jedna biała i jedna czarna kula. Prawdą jest, że:

(A) $\lim_{n\to\infty} p_n(1) = \frac{2}{3}$

(B) $\lim_{n\to\infty} p_n(1) = \frac{1}{2}$

(C) $\lim_{n\to\infty} p_n(1) = \frac{1}{3}$

(D) $\lim_{n\to\infty} p_n(1) = \frac{1}{4}$

(E) granica $\lim_{n\to\infty} p_n(1)$ zależy od tego, ile kul białych było w I urnie na początku

Łańcuch Markowa z 3 stanami (możliwe kombinacje kul w 1 urnie):

Stan I: 1b 1c

Stan II: 2c

Stan III: 2b

Prawdopodobieństwa przejść:

$p_{11} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ $\quad p_{21} = \frac{2}{3}$ $\quad p_{31} = \frac{2}{3}$

$p_{12} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\quad p_{22} = \frac{1}{3}$ $\quad p_{32} = 0$

$p_{13} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\quad p_{23} = 0$ $\quad p_{33} = \frac{1}{3}$

Rozkład stacjonarny

$$[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3]\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3]$$

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_2 \\ \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \frac{1}{6}\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_2 = 0 \\ \frac{1}{6}\pi_1 - \frac{2}{3}\pi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_1 = \frac{2}{3}$$

TW. Gdy Łańcuch Markova ma rozkład stacjonarny to $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_n(j)$.

$$\pi_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(j) = \frac{2}{3}$$

A