Zadanie 1. W pierwszej urnie znajdują się kule ponumerowane liczbami 1, 2, ... , 10, zaś w drugiej urnie – kule ponumerowane liczbami 6, 7, ... , 25. Wyciągamy losowo po jednej kuli z każdej urny. Prawdopodobieństwo, że obie kule mają ten sam numer jest równe:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{1}{40}$

(E) $\frac{1}{50}$

$|\Omega| = 20 \cdot 10 = 200$

$|A| = 5$

$P = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$

D

Zadanie 2. W pierwszej skrzynce jest 15 jabłek zdrowych i 5 zepsutych. W drugiej skrzynce jest 14 jabłek zdrowych i 6 zepsutych. Wybieramy losowo (z prawdopodobieństwem jedna druga) jedną ze skrzynek i wyciągamy z niej 3 różne jabłka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybraliśmy drugą skrzynkę, jeśli wiemy, że wszystkie 3 jabłka okazały się zdrowe?

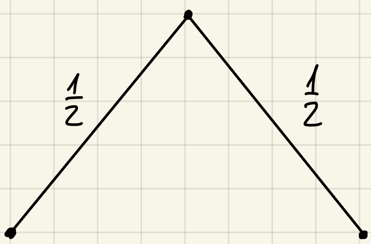
(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{4}{9}$

(C) $\binom{29}{3}\Big/\binom{40}{3}$

(D) $\frac{14}{29}$

(E) $\frac{28}{29}$



$$P(X=3)=\frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{20}{3}}=\frac{91}{228} \qquad P(X=3)=\frac{\binom{14}{3}\binom{6}{0}}{\binom{20}{3}}=\frac{91}{285}$$

$$P(2\text{ urna} \mid 3\text{ zdrowe})=\frac{\frac{91}{285}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{91}{228}\cdot\frac{1}{2}+\frac{91}{285}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}$$

B

Zadanie 3. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi takimi, że:

X ma gęstość: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & dla \quad 0 \le x \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$

$\Pr(Y = k | X = x) = \frac{x^k}{k!} \cdot e^{-x}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

(A) X i Y są zmiennymi niezależnymi

(B) X i Y są zmiennymi nieskorelowanymi

(C) $[COV(X,Y)]^2 = VAR(X) \cdot VAR(Y)$

(D) X oraz $Y - X$ są zmiennymi nieskorelowanymi

(E) $COV(X, Y - X) = 1$

A- odpada bo $Y|X$ zależy od x

$$P(Y=k) = \int_0^\infty P(Y|X=x) f_X(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{x^k}{k!} e^{-x} \cdot e^{-x}\,dx = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty 2x^k e^{-2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2k!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}$$ | gęstość rozkładu ujemnego dwumianowego $NB(\frac{1}{2}, 1)$ |

$EY = \frac{pr}{q} = 1$ $\quad$ $Var(Y) = \frac{pr}{q^2} = 2$

$EX = 1$ $\quad$ $Var(Y) = 1$

$Cov(X,Y) = EXY - EX\,EY$

$$EXY = \int_0^\infty E[XY | X=x] f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x\,E[Y|X=x] f_X(x)\,dx$$

$$E[Y|X=x] = \sum_{k=0}^\infty k \frac{x^k}{k!} e^{-x} = x$$

$$EXY = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = 2$$

$Cov(X,Y) = 2 - 1 \cdot 1 = 1$ $\quad$ czyli B i C odpadają

$$Cov(X, Y-X) = E[X(Y-X)] - EX\,E[Y-X] = EXY - EXY - EX(EY - EX) =$$

$$= 2 - 2 - 1 \cdot (1-1) = 0$$

D

Zadanie 4. Macierz przejścia łańcucha Markowa o stanach E_1, E_2, E_3, E_4 jest równa:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Niech $P^n(2,1)$ będzie prawdopodobieństwem, że łańcuch po wykonaniu n kroków znajdzie się w stanie E_1, jeśli w chwili początkowej znajdował się w stanie E_2.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(2,1) = \frac{2}{3}$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(2,1) = \frac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(2,1) = 1$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(2,1)$ nie istnieje

(E) $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(2,1) = \frac{5}{6}$

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$$

$$\pi^{(0)} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \\ 0 \end{matrix}$$

Ozn. $p_2(n)$ – element macierzy z 1 kolumny i 2 wiersza

$p_3(n)$ – element macierzy z 1 kolumny i 3 wiersza

$$\begin{cases} p_2(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_3(n-1) \\ p_3(n) = \frac{1}{3} \cdot p_2(n-1) + \frac{1}{3} p_3(n-1) \end{cases}$$

Przy $n \to \infty$ $p_2(n) = p_2(n-1)$ i $p_3(n) = p_3(n-1)$

$$\begin{cases} p_2(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_3(n) \\ p_3(n) = \frac{1}{3} p_2(n) + \frac{1}{3} p_3(n) \end{cases}$$

$$\frac{2}{3} p_3(n) = \frac{1}{3} p_2(n)$$

$$p_3(n) = \frac{1}{2} p_2(n)$$

$$p_2(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} p_2(n)$$

$$\begin{cases} p_2(n) = \frac{2}{3} \\ p_3(n) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} P^n(2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}$$

A

Zadanie 5. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot e^{-x\cdot(y-x)} & dla \quad y>x, \quad 0\le x\le 1 \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

Jeżeli $\mu(X)=E(Y|X)$ to $\Pr(Y>\mu(X))$ wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) e^{-1}

(C) 1

(D) $\frac{1}{1+e}$

(E) $\frac{2}{1+e}$

$$f_X(x)=\int_x^{\infty} xe^{-x(y-x)}\,dy = xe^{x^2}\int_x^{\infty} e^{-xy}\,dy = xe^{x^2}\cdot\frac{1}{x}e^{-x^2}=1 \quad dla \quad 0\le x\le 1$$

$X \sim U(0,1)$

$$E[Y|X]=\int_x^{\infty} y\,\frac{xe^{-x(y-x)}}{1}\,dy = xe^{x^2}\int_x^{\infty} ye^{-xy}\,dy = xe^{x^2}\left[-\frac{y}{x}e^{-xy}-\frac{1}{x^2}e^{-xy}\right]_x^{\infty}=$$

$$=xe^{x^2}\left[e^{-x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-x^2}\right]=x+\frac{1}{x}$$

$$P(Y>\mu(x))=P\left(Y>x+\frac{1}{x}\right)=\int_0^1\int_{x+\frac{1}{x}}^{\infty} xe^{-x(y-x)}\,dy\,dx=\int_0^1 xe^{x^2}\cdot\left[-\frac{1}{x}e^{-xy}\right]_{x+\frac{1}{x}}^{\infty}\,dx=$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}\cdot\frac{1}{x}\exp\left\{-x\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}dx=\int_0^1 e^{x^2}\cdot e^{-x^2}\cdot e^{-1}\,dx=\int_0^1 e^{-1}\,dx=e^{-1}$$

B

Zadanie 6. $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest próbą losową z rozkładu o gęstości:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & dla \quad x \ge \theta \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

Estymator największej wiarogodności nieznanego parametru θ ma postać:

(A) $\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - n$

(B) $\hat{\theta} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

(C) $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - 1$

(D) $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \exp(-x_i)\right)$

(E) $\hat{\theta} = med\{x_1, x_2, \dots, x_n\} + \ln 2$

$$f(x) = e^{-(x-\theta)}$$

$$\ln f(x) = -x + \theta$$

$$L(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta$$

$$L'(\theta) = n$$

Trzeba znaleźć $\hat{\theta}$ inaczej:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \mathbb{1}(x_1 \geq \theta) \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}(x_n \geq \theta) = e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)} \mathbb{1}(\min(x_i) \geq \theta)$$

$$l(\theta) = -\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta) = n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Trzeba maksymalizować powyższą funkcję czyli θ musi być jak największe ale jest ograniczenie, że $\min(x_i) \geq \theta$ czyli:

$$\hat{\theta} = \min(x_1, \dots, x_n)$$

B

Zadanie 7. Wykonano 10 pomiarów pewnej nieznanej wielkości μ jednym przyrządem pomiarowym, a następnie 5 pomiarów innym przyrządem. Zakładamy, że wyniki pomiarów $X_1, X_2, \ldots, X_{10}, X_{11}, \ldots, X_{15}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym każda ze zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, \quad 0.1^2)$, podczas gdy każda ze zmiennych $X_{11}, \ldots, X_{15}$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, \quad 0.2^2)$. Należy tak dobrać współczynniki $c_1, c_2, \ldots, c_{15}$, żeby estymator:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$$

był nieobciążonym estymatorem o minimalnej wariancji.

(A) $c_1 = \cdots = c_{15} = \frac{1}{15}$

(B) $c_1 = \cdots = c_{10} = \frac{1}{20}$ i $c_{11} = \cdots = c_{15} = \frac{1}{10}$

(C) $c_1 = \cdots = c_{10} = \frac{1}{10}$ i $c_{11} = \cdots = c_{15} = 0$

(D) $c_1 = \cdots = c_{10} = \frac{8}{90}$ i $c_{11} = \cdots = c_{15} = \frac{1}{45}$

(E) $c_1 = \cdots = c_{10} = \frac{8}{90}$ i $c_{11} = \cdots = c_{15} = \frac{1}{90}$

Oblicz minimalną wariancję korzystając z nierówności Rao - Cramera

$$Var(\mu) = \frac{1}{n I(\mu)}$$

$$f(X;\mu) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 0{,}1} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\cdot 0{,}1^2}\right) \cdot \prod_{i=11}^{15} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 0{,}2} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\cdot 0{,}2^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{0{,}1\sqrt{2\pi}}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{0{,}2\sqrt{2\pi}}\right)^{5} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu)^2}{0{,}02}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2}{0{,}08}\right)$$

$$\ln f(X;\mu) = -10\ln(0{,}1\sqrt{2\pi}) - 5\ln(0{,}2\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{0{,}02}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{0{,}08}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2$$

$$\ln' f(X;\mu) = 100\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu) + 25\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu)$$

$$\ln'' f(X;\mu) = -100\cdot 10 - 25\cdot 5 = -1125$$

$$I(\mu) = -E(\ln'' f(x;\mu)) = 1125$$

$$Var(\mu) \geq \frac{1}{1125}$$

Trzeba teraz ustawiać odpowiedzi do wzoru:

$$\operatorname{Var}(\hat{\mu}) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{15} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{15} c_i^2 \operatorname{Var}(X_i) = 10 \cdot \left(\frac{1}{90}\right)^2 \cdot 0{,}1^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{45}\right)^2 \cdot 0{,}2^2 = \frac{1}{1125}$$

D

Zadanie 8. Zakładamy, że liczba roszczeń w ciągu roku dla pewnego portfela ryzyk jest zmienną losową X o rozkładzie Poissona. Zaobserwowano wartość $X = 2600$. Czy test hipotezy:

$H_0: \quad E(X) = 2500$

przeciwko alternatywie:

$H_1: \quad E(X) > 2500$

prowadzi do odrzucenia H_0 na poziomie istotności α?

Test zbudowano w oparciu o przybliżenie rozkładu Poissona rozkładem normalnym i ma obszar krytyczny postaci $X > c$.

(A) TAK, dla $\alpha = 0.005$

(B) NIE, dla $\alpha = 0.005$; TAK, dla $\alpha = 0.01$

(C) NIE, dla $\alpha = 0.01$; TAK, dla $\alpha = 0.05$

(D) NIE, dla $\alpha = 0.05$; TAK, dla $\alpha = 0.1$

(E) NIE, dla $\alpha = 0.1$

Dla dużego λ rozkład Poissona można przybliżyć rozkładem normalnym o średniej i wariancji równej λ, czyli dla $X \sim P(\lambda)$ oraz dla dużego λ mamy $X \sim N(\lambda, \lambda)$

$$P_0(X > c) = \alpha$$

$$P_0\left(\frac{X - 2500}{\sqrt{2500}} > \frac{c - 2500}{\sqrt{2500}}\right) = \alpha$$

$$1 - P_0\left(Z < \frac{c - 2500}{50}\right) = \alpha$$

$$\Phi\left(\frac{c - 2500}{50}\right) = 1 - \alpha$$

$$\frac{c - 2500}{50} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

$$c - 2500 = 50\,\Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

$$c = 50\,\Phi^{-1}(1 - \alpha) + 2500$$

α	$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	c	
0,005	2,5758	2629	nie odrzucam
0,01	2,3263	2616	nie odrzucam
0,05	1,6445	2582	odrzucam
0,1	1,2816	2564	odrzucam

C

Zadanie 9. $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ jest próbą losową z rozkładu normalnego o parametrach $(0, \sigma^2)$. Rozważmy najmocniejszy test hipotezy:

$H_0: \quad \sigma^2 = 1$

przeciwko alternatywie:

$H_1: \quad \sigma^2 = 3$

Na poziomie istotności 0.01. Moc testu wynosi:

(A) około 0.50

(B) około 0.05

(C) około 0.20

(D) około 0.90

(E) około 0.99

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$L(x_1, \dots, x_{20}) = \prod_{i=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{20} \exp\left(-\sum_{i=1}^{20} \frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_{20}) = \frac{L_1(x_1, \dots, x_{20})}{L_0(x_1, \dots, x_{20})} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{20} \cdot \exp\left(-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{20} x_i^2\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{20} \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^{20} x_i^2\right)} > k$$

$$\exp\left(-\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{20} x_i^2 + \sum_{i=1}^{20} x_i^2\right) > k$$

$$\frac{5}{6}\sum_{i=1}^{20} x_i^2 > k$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 > k$$

$$P_0\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{20} x_i^2}_{\chi^2(20)} > k\Big) = 0{,}01$$

$$k = 37{,}57$$

$$\text{moc} = P_1\left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 > 37{,}57\right) = P_1\left(3\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 > 37{,}57\right) =$$

$$= P\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{20} Y_i^2}_{\chi^2(20)} > 12{,}52\Big) \approx 0{,}9$$

D

Zadanie 10. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & dla \quad x \geq \theta \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Funkcja tworząca momenty zmiennej losowej $Y = \min\{X, m\}$, gdzie $m > 0$ jest daną liczbą, wyraża się wzorem:

(A) $M_Y(t) = \frac{1}{1-t} \cdot \left[1 - t \cdot e^{-m(1-t)}\right]$ dla $t \neq 1$; $M_Y(1) = m + 1$

(B) $M_Y(t) = \min\left\{\frac{1}{1-t}, \ e^{mt}\right\}$ dla $t < 1$; $M_Y(t) = e^{mt}$ dla $t \geq 1$

(C) $M_Y(t) = \frac{1}{1-t} \cdot e^{mt}$

(D) $M_Y(t) = \frac{m}{m-t} \cdot e^{mt}$ dla $t < m$; $M_Y(t) = \infty$ dla $t \geq m$

(E) $M_Y(t) = \frac{1}{1-t} \cdot \left[1 - t \cdot e^{-m(1-t)}\right]$ dla $t < 1$; $M_Y(t) = \infty$ dla $t \geq 1$

$$\min\{X, m) = \begin{cases} X, & X < m \\ m, & X > m \end{cases}$$

$$M_Y(t) = E\exp\{t \min\{X, m\}\} = E\exp\{tX\} \mathbb{1}\{X<m\} + E\exp\{tm\}\mathbb{1}\{X>m\} =$$

$$= \int_0^m e^{tx} e^{-x} dx + \int_m^\infty e^{tm} e^{-x} dx = \frac{1}{t-1} e^{x(t-1)} \Big|_0^m - e^{tm} e^{-x} \Big|_m^\infty =$$

$$= \frac{1}{t-1}\left[e^{m(t-1)} - 1\right] + e^{tm} e^{-m} = \frac{e^{m(t-1)}}{t-1} + \frac{(t-1)e^{m(t-1)}}{t-1} - \frac{1}{t-1} =$$

$$= \frac{te^{m(t-1)}}{t-1} - \frac{1}{t-1} = \frac{1}{t-1}\left[te^{m(t-1)} - 1\right] = \frac{1}{1-t}\left[1 - te^{m(t-1)}\right], \quad t \neq 1$$

Dla $t=1$

$$E\exp\{\min(X, m)\} = \int_0^m dx + \int_m^\infty e^m e^{-x} dx = x \Big|_0^m - e^m e^{-x} \Big|_m^\infty =$$

$$= m + e^m e^{-m} = m + 1$$

A