Zadanie 1. Rozważmy zdarzenia losowe A_1, A_2 oraz C takie, że:

$\Pr(C|A_1) = \frac{1}{3}$, $\Pr(C|A_2) = \frac{1}{2}$,

$\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \frac{1}{2}$,

zdarzenia A_1 i A_2 są niezależne oraz $A_1 \cap A_2 \cap C = \varnothing$.

Z powyższych danych wynika, że:

(A) $\Pr(C|A_1 \cup A_2) = \frac{2}{3}$

(B) zdarzenia A_1, A_2 i C są niezależne

(C) $\Pr(C|A_1 \cup A_2) = \frac{5}{9}$

(D) dane zawierają sprzeczność, taka sytuacja jest niemożliwa

(E) $\Pr(C|A_1 \cup A_2) = \frac{5}{12}$

$$P(C | A_1 \vee A_2) = \frac{P(C \wedge (A_1 \vee A_2))}{P(A_1 \vee A_2)} = \frac{P((C \wedge A_1) \vee (C \wedge A_2))}{P(A_1 \vee A_2)} = \frac{P(C \wedge A_1) + P(C \wedge A_2)}{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \wedge A_2)}$$

$$P(C | A_1) = \frac{P(C \wedge A_1)}{P(A_1)}$$

$$P(C \wedge A_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \wedge A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 \wedge A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(C | A_1 \vee A_2) = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

C

Zadanie 2. Jeśli dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona mamy $\Pr(N \le 1) = \frac{8}{9} \cdot \Pr(N = 2)$, to:

(A) $E(N) = \frac{17}{9}$

(B) $E(N) = 3$

(C) $VAR(N) = 2$

(D) $E(N^2) = 3$

(E) $E(N) = \frac{8}{9}$

$$P(N=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad EN = \lambda \qquad Var(N) = \lambda$$

$$P(N \le 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = e^{-\lambda}(1+\lambda)$$

$$\frac{8}{9} P(N=2) = \frac{\cancel{8}^{\,4}}{9} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{\cancel{2!}_{\,1}} = \frac{4}{9}\lambda^2 e^{-\lambda}$$

$$1 + \lambda = \frac{4}{9}\lambda^2$$

$$\frac{4}{9}\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\lambda = \frac{1 + \frac{5}{3}}{2 \cdot \frac{4}{9}} = 3$$

$$EN = 3$$

B

Zadanie 3. Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_{735}$ oraz $Y_1, Y_2, \dots, Y_{880}$ są niezależne, o rozkładach:

$\Pr(X_i = 0) = \frac{3}{7}, \quad \Pr(X_i = 1) = \frac{4}{7},$

$\Pr(Y_i = 0) = \Pr(Y_i = 1) = \frac{1}{2}.$

Prawdopodobieństwo tego, że:

$\sum_{i=1}^{735} X_i < \sum_{i=1}^{880} Y_i,$

policzone w przybliżeniu przy pomocy aproksymacji rozkładem normalnym, wynosi:

A) 0.01

(B) 0.99

(C) 0.16

(D) 0.50

(E) 0.84

$$EX_i = \frac{4}{7} \qquad EX_i^2 = \frac{4}{7} \qquad Var(X_i) = \frac{4}{7} - \frac{16}{49} = \frac{12}{49}$$

$$EY_i = \frac{1}{2} \qquad EY_i^2 = \frac{1}{2} \qquad Var(Y_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{735} X_i < \sum_{i=1}^{880} Y_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{735} X_i - \sum_{i=1}^{880} < 0\right)$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{735} X_i - \sum_{i=1}^{880}\right] = 735 \cdot \frac{4}{7} - 880 \cdot \frac{1}{2} = -20$$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{735} X_i - \sum_{i=1}^{880}\right] = 735 \cdot \frac{12}{49} + 880 \cdot \frac{1}{4} = 400$$

$$P\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{735} X_i - \sum_{i=1}^{880}\right) + 20}{20} < \frac{0+20}{20}\right) = \Phi(1) \approx 0,84$$

E

Zadanie 4. Zmienne losowe X_1, X_2 i X_3 mają łączny rozkład normalny, gdzie $E(X_i)=0$, $VAR(X_i)=1$ dla $i=1,2,3$.
Jeśli $COV(X_1, X_2) = COV(X_2, X_3) = COV(X_1+X_2, X_2+X_3) = 0$, to:

(A) wynika stąd, że $\Pr(X_1 = -X_3) = 0$

(B) wynika stąd, że $\Pr(X_1 = X_3) = 1$

(C) wynika stąd, że $\Pr(X_1 > -X_3) = \frac{1}{2}$

(D) wynika stąd, że $\Pr(X_1 = -X_3) = 1$

(E) nie musi stąd wynikać żadne ze stwierdzeń (A)-(D)

$$Cov(X,Y) = E[XY] - EXEY$$

$$Cov(X_1+X_2,\ X_2+X_3) = Cov(X_1,X_2) + Cov(X_1,X_3) + Var(X_2) + Cov(X_2,X_3) =$$

$$= EX_1X_2 + EX_1X_3 + 1 + EX_2X_3 = 1 + EX_1X_3 = 0$$

$$EX_1X_3 = -1$$

$$\rho(X_1,X_3) = \frac{Cov(X_1,X_3)}{\sqrt{Var(X_1)\,Var(X_2)}} = \frac{EX_1X_3}{\sqrt{Var(X_1)\,Var(X_2)}} = -1$$

Jeżeli $\rho(X_1,X_3) = -1$ to $X_3 = aX_1 + b$, gdzie $a < 0$

$$EX_3 = a \cdot 0 + b = 0$$

$$b = 0$$

$$Var X_3 = a^2 \cdot 1 = a^2, \quad a < 0$$

$$a = -1$$

$$X_3 = -X_1$$

$$X_1 = -X_3$$

$$P(X_1 = -X_3) = 1$$

D

Zadanie 5. Zmienne losowe X i Y są niezależne.
X ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & dla \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Y ma rozkład o gęstości:

$$g(y) = \begin{cases} e^{-y} & dla \quad 0 \le y \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Jeśli $S = X + Y$ to $E\left(S \middle| X \le \frac{1}{2}\right)$ wynosi:

(A) 2

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{13}{12}$

$$E(S \mid X \le \tfrac{1}{2}) = E(X+Y \mid X \le \tfrac{1}{2}) = E(X \mid X \le \tfrac{1}{2}) + EY =$$

$$= \frac{E[X \le \frac{1}{2}]}{P(X \le \frac{1}{2})} + EY = \frac{\int_0^{0,5} 2x^2\, dx}{\int_0^{0,5} 2x\, dx} + \int_0^{\infty} y e^{-y}\, dy =$$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} + 1 = \frac{4}{3}$$

C

Zadanie 6. $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ jest próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie μ i σ^2 są nieznanymi parametrami. Niech $[L, U]$ będzie przedziałem ufności dla parametru μ takim, że

$\Pr_{\mu,\sigma}(L > \mu) = \Pr_{\mu,\sigma}(U < \mu) = 0.025$ dla każdych μ i σ^2.

Niech $(-\infty, W]$ będzie jednostronnym przedziałem ufności dla parametru μ takim, że $\Pr_{\mu,\sigma}(W < \mu) = 0.01$ dla każdych μ i σ^2.

Oba przedziały zbudowane są w standardowy sposób w oparciu o średnią i wariancję z próbki $\bar{x}$ i s^2. Jeżeli $L = -0.262$ i $U = 4.262$ to wartość W wynosi:

(A) 4.262

(B) 4.821

(C) 5.169

(D) 3.833

(E) nie można podać wartości W na podstawie tych danych

Przedział ufności:

$$\left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$t_{0{,}025;9} = 2{,}2622$

$$\begin{cases} L = -0{,}262 = \bar{X} - \frac{2{,}2622}{3} \cdot S \\ U = 4{,}262 = \bar{X} + \frac{2{,}2622}{3} \cdot S \quad /+ \end{cases}$$

$4{,}262 - 0{,}262 = 2\bar{X}$

$\bar{X} = 2$

$S = (4{,}262 - 2) \cdot \frac{3}{2{,}2622}$

$S = 3$

$P(W < \mu) = 0{,}01$

$1 - P(W > \mu) = 0{,}01$

$P(W > \mu) = 0{,}99$

$t_{0{,}99;9} = 2{,}8214$

$W = \bar{X} + \frac{t_{0{,}99;9}}{3} \cdot S = 2 + 2{,}8214 = 4{,}821$

B

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$, gdzie $n > 1$, będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} & dla \quad 0 \le x \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Rozważamy dwa estymatory nieznanego parametru $\mu > 0$:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\mu}_2 = n \cdot \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

(A) Estymator $\hat{\mu}_1$ jest nieobciążony, zaś $\hat{\mu}_2$ jest obciążony.

(B) Estymator $\hat{\mu}_1$ jest obciążony, zaś $\hat{\mu}_2$ jest nieobciążony.

(C) Oba estymatory są nieobciążone i mają równe wariancje.

(D) Oba estymatory są nieobciążone; dla pewnych wartości μ estymator $\hat{\mu}_1$ ma większą wariancję niż $\hat{\mu}_2$.

(E) Oba estymatory są nieobciążone; $\hat{\mu}_1$ ma zawsze mniejszą wariancję niż $\hat{\mu}_2$.

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$EX = \mu$$

$$E\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} EX_i = \mu$$ nieobciążony

$$\min\{X_1, \dots, X_n\} \sim Exp\left(\frac{n}{\mu}\right)$$

$$E\hat{\mu}_2 = n \, E \min(X_1, \dots, X_n) = n \cdot \frac{\mu}{n} = \mu$$ nieobciążony

$$Var(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\mu^2 = \frac{\mu^2}{n}$$

$$Var(\hat{\mu}_2) = n^2 \cdot \frac{\mu^2}{n^2} = \mu^2$$

$$\frac{\mu^2}{n} < \mu^2$$

E

Zadanie 8. $x_1, x_2, \dots, x_n$ jest próbą losową z rozkładu o dystrybuancie:

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^\alpha}, \qquad (-\infty < x < \infty, \quad \alpha > 0).$$

Estymator największej wiarygodności nieznanego parametru α ma postać:

(A) $\hat{\alpha} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left(1+\exp(-x_i)\right)^{-1}}$

(B) $\hat{\alpha} = \exp(-\bar{x})$, gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

(C) $\hat{\alpha} = \ln\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(1+\exp(-x_i)\right)^{-1}\right]$

(D) $\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\exp(-x_i)\right)$

(E) $\hat{\alpha} = n \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\exp(-x_i)\right)\right]^{-1}$

$$F_\alpha(x) = (1+e^{-x})^{-\alpha}$$

$$f(x) = -\alpha(1+e^{-x})^{-\alpha-1} \cdot e^{-x}(-1) = \alpha e^{-x}(1+e^{-x})^{-\alpha-1}$$

$$\ln f(x) = \ln\alpha - x - (\alpha+1)\ln(1+e^{-x})$$

$$L(\alpha) = n\ln\alpha - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} \ln(1+e^{-x_i})$$

$$L'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \ln(1+e^{-x_i}) = 0$$

$$\hat{\alpha} = n \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \ln(1+e^{-x_i})\right]^{-1}$$

E

Zadanie 9. Zmienna losowa X ma gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$. Na podstawie pojedynczej obserwacji X przeprowadzamy test hipotezy:

$$H_0 : f(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

przeciwko alternatywie:

$$H_1 : f(x) = \begin{cases} 5 \cdot x^4 & dla \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Najmocniejszy test na poziomie istotności α ma moc:

(A) $1-(1-\alpha)^5$

(B) $(1-\alpha)^5$

(C) α^5

(D) $5\alpha^4$

(E) $1-5\alpha^4$

$$\lambda(x) = 5x^4 > k$$

$$x^4 > k$$

$$x > k$$

$$P_0(X > k) = \int_k^1 dx = 1 - k = \alpha$$

$$k = 1-\alpha$$

$$moc = P_1(X > k) = \int_k^1 5x^4\,dx = x^5 \Big|_k^1 = 1 - k^5 = 1-(1-\alpha)^5$$

A

Zadanie 10. Wykonano 120 razy rzut dwiema kośćmi do gry: czarną i białą.

45 razy na białej kości wypadło więcej oczek, niż na czarnej;
50 razy na białej kości wypadło mniej oczek, niż na czarnej;
25 razy na obu kościach wypadła ta sama liczba oczek.

Rozważmy hipotezę H_0: „obie kości są rzetelne i wynik rzutu kością białą jest niezależny od wyniku rzutu kością czarną".
Czy otrzymane wyniki dają podstawę, żeby odrzucić hipotezę H_0? Przeprowadzono test χ^2 w oparciu o przytoczone dane.

(A) Na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ test prowadzi do odrzucenia H_0.

(B) Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ test prowadzi do odrzucenia H_0, natomiast dla $\alpha = 0.05$ test nie prowadzi do odrzucenia H_0.

(C) Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ test prowadzi do odrzucenia H_0, natomiast dla $\alpha = 0.01$ test nie prowadzi do odrzucenia H_0.

(D) Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ test nie prowadzi do odrzucenia H_0.

(E) Na poziomie istotności $\alpha = 0.005$ test prowadzi do odrzucenia H_0.

p_1 – p-stwo na białej więcej oczek niż na czarnej

p_2 – p-stwo na czarnej więcej oczek niż na białej

p_3 – p-stwo na obu oczkach ta sama liczba

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

O_i – liczba zdarzeń zaobserwowanych

E_i – liczba zdarzeń spodziewanych (wartość oczekiwana)

$$\chi^2 = \frac{\left(45 - 120\cdot\frac{5}{12}\right)^2}{120\cdot\frac{5}{12}} + \frac{\left(50 - 120\cdot\frac{5}{12}\right)^2}{120\cdot\frac{5}{12}} + \frac{\left(25 - 120\cdot\frac{1}{6}\right)^2}{120\cdot\frac{1}{6}} = 1{,}75$$

Liczba stopni swobody: $n-1 = 2$

Wartość statystyki testowej:

$\chi^2_{0,01} = 9{,}21$ $\quad\chi^2_{0,05} = 5{,}99$ $\quad\chi^2_{0,1} = 4{,}61$ $\quad\chi^2_{0,005} = 10{,}6$

W żadnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

D