Zadanie 1. Wykonujemy 10 kolejnych, niezależnych rzutów symetryczną monetą. Niech S_n oznacza liczbę orłów otrzymaną w początkowych n rzutach. Prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(S_5 = 3 | S_{10} = 7)$ jest równe:

(A) $\frac{3}{7}$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\binom{5}{3} \cdot \frac{1}{2^5}$

(D) $\frac{21}{50}$

(E) $\dfrac{\binom{5}{3} \cdot \frac{1}{2^5}}{\binom{10}{3} \cdot \frac{1}{2^{10}}}$

$S_n \sim Bin(n, \frac{1}{2})$

$$P(S_5 = 3 \mid S_{10} = 7) = \frac{P(S_5 = 3 \cap S_{10} = 7)}{P(S_{10} = 7)} = \left| \text{3 orły w pierwszych 5 rzutach i 4 orły w pozostałych 5 rzutach} \right| =$$

$$= \frac{\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{\frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{5!}{4!}}{\frac{10!}{7!\,3!}} = \frac{5}{12}$$

B

Zadanie 2. Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x (czyli największą liczbę całkowitą n taką, że $n \le x$). Wartość oczekiwana zmiennej losowej $N = [X + 0.5]$ wyraża się wzorem:

(C) $\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{\lambda}\right] + \frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{[\lambda]} + \frac{1}{2}$

(D) $\frac{e^{0.5 \cdot \lambda}}{e^{\lambda} - 1}$

(E) $\frac{1}{e^{\lambda} - 1}$

$N=0: \quad 0 < x + 0{,}5 < 1 \qquad 0 < x < 0{,}5$

$N=1: \quad 1 < x + 0{,}5 < 2 \qquad 0{,}5 < x < 1{,}5$

$N=2: \quad 2 < x + 0{,}5 < 3 \qquad 1{,}5 < x < 2{,}5$

$$P(N=k) = P(k - 0{,}5 < X < k + 0{,}5) = 1 - e^{-\lambda(k+0{,}5)} - 1 + e^{-\lambda(k-0{,}5)} =$$

$$= e^{-\lambda k + 0{,}5\lambda} - e^{-\lambda k - 0{,}5\lambda} = e^{-\lambda k}\left(e^{0{,}5\lambda} - e^{-0{,}5\lambda}\right)$$

$$EN = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda k}\left(e^{0{,}5\lambda} - e^{-0{,}5\lambda}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda k} = e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda} + 3e^{-3\lambda} + \ldots = A$$

$$A - Ae^{-\lambda} = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} + 2e^{-2\lambda} - 2e^{-3\lambda} + 3e^{-3\lambda} + \ldots =$$

$$= e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda} + \ldots = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

$$A(1 - e^{-\lambda}) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

$$A = \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}$$

$$EN = \frac{(e^{0,5\lambda} - e^{-0,5\lambda})e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2} = \frac{e^{-\lambda}e^{0,5\lambda}(1-e^{-\lambda})}{(1-e^{-\lambda})^2} = \frac{e^{-\lambda}e^{0,5\lambda}}{1-e^{-\lambda}} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}e^{0,5\lambda}}{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)} = \frac{e^{0,5\lambda}}{e^{\lambda}-1}$$

D

Zadanie 3. Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ ma taką samą wartość oczekiwaną μ. Wiadomo, że:

$$COV(X_i, X_j) = \begin{cases} \sigma^2 & dla \quad i = j \\ \dfrac{\sigma^2}{2} & dla \quad i \neq j \end{cases}$$

Niech $S^2(c) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$, gdzie $\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$S^2(c)$ jest nieobciążonym estymatorem parametru σ^2, jeśli c jest równe:

(A) $\dfrac{2}{n-1}$

(B) $\dfrac{2}{n-1+\frac{1}{n}}$

(C) $\dfrac{1}{n}$

(D) $\dfrac{2}{n}$

(E) $\dfrac{1}{n-1}$

$$S^2(c) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = c \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X} \sum_{i=1}^{n} + n\overline{X}^2 \right] =$$

$$= c \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right]$$

$$EX_i^2 = Var(X_i) + (EX_i)^2$$

$$(EX_i)^2 = \mu^2$$

$$Var(X_i) = \sigma^2$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right] = n(\mu^2 + \sigma^2) - nE\overline{X}^2$$

$$E\overline{X}^2 = E\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \right]^2 = \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) + \left(E\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j) + \left(\sum_{i=1}^{n} EX_i \right)^2 =$$

$$= n\sigma^2 + n(n-1)\frac{\sigma^2}{2} + n^2\mu^2$$

$$E\overline{X}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{n-1}{n} \right) \frac{\sigma^2}{2} + \mu^2$$

$$E\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = n(\mu^2 + \sigma^2) - \sigma^2 - (n-1)\frac{\sigma^2}{2} - n\mu^2 =$$

$$= \cancel{n\mu^2} + n\sigma^2 - \sigma^2 - (n-1)\frac{\sigma^2}{2} - \cancel{n\mu^2} =$$

$$= \sigma^2 (n-1) - (n-1)\frac{\sigma^2}{2} =$$

$$= (n-1)\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2}\right) = (n-1)\frac{\sigma^2}{2}$$

$$c(n-1)\frac{\sigma^2}{2} = \sigma^2 \quad \Big| : \sigma^2$$

$$c\,\frac{n-1}{2} = 1$$

$$c = \frac{2}{n-1}$$

A

Zadanie 4. Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 0.5. Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1. $\Pr\left(Y > X^2\right)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(C) $\sqrt{\frac{e}{\pi}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{2\pi}}\, e^{-x^2}$$

$$f_Y(y) = e^{-y}$$

z niezależności

$$P(Y > X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x^2}^{\infty} e^{-y} \sqrt{\frac{2}{2\pi}}\, e^{-x^2}\, dy\, dx = \sqrt{\frac{2}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2\pi}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\cdot\frac{1}{4}}}\, dx}_{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E

Zadanie 5. Rozważmy model regresji liniowej:

$Y_i = a \cdot x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$

gdzie ε_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i nieznaną wariancją σ^2, zaś x_1, x_2, x_3, x_4 są (nielosowymi) punktami z przedziału $[0, 3]$, natomiast a jest nieznanym współczynnikiem. Wariancja estymatora $\hat{a}$ otrzymanego metodą najmniejszych kwadratów jest minimalna, jeśli (x_1, x_2, x_3, x_4) równe są odpowiednio:

(A) $(0, 1, 2, 3)$

(B) $(0, 0, 3, 3)$

(C) $(0, 3, 3, 3)$

(D) $(3, 3, 3, 3)$

(E) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$S = \sum_{i=1}^{4} (y_i - a x_i)^2$$

$$\frac{dS}{da} = -2 \sum_{i=1}^{4} (y_i - a x_i) x_i := 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} (y_i x_i - a x_i^2) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i = a \sum_{i=1}^{4} x_i^2$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}$$

| x_i są nielosowe |
| y_i są niezależne |

$$\mathrm{Var}(\hat{a}) = \mathrm{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^{4} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \,\mathrm{Var}(y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right)^2} = \frac{\mathrm{Var}(y)}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}$$

minimum dla największego mianownika czyli dla $(3,3,3,3)$

D

Zadanie 6. Przyjmujemy, że liczby wypadków $N_1, N_2, \ldots, N_k$ zgłoszonych w kolejnych k latach są niezależnymi zmiennymi losowymi. Zakładamy, że zmienna N_i ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą $\lambda \cdot m_i$, gdzie m_i jest (znaną) liczbą samochodów ubezpieczonych w i-tym roku, zaś λ nieznanym parametrem. Estymator Największej Wiarygodności $\hat{\lambda}$ parametru λ dany jest wzorem:

(A) $\hat{\lambda} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{m_i}$

(B) $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$

(C) $\hat{\lambda} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} N_i$

(D) $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$

(E) $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \cdot m_i}{k}$

$$P_X(x_i) = \frac{(\lambda m_i)^{x_i} e^{-\lambda m_i}}{x_i!}$$

$$\ln P_X(x_i) = x_i \ln \lambda + x_i \ln m_i - \lambda m_i - \ln x_i!$$

$$L(\lambda) = \ln \lambda \sum_{i=1}^{k} x_i - \lambda \sum_{i=1}^{k} m_i$$

$$L'(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\lambda} - \sum_{i=1}^{k} m_i = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$$

B

Zadanie 7. Gęstość zmiennej losowej X ma postać:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x-\theta|}, \quad x \in R,$$

gdzie θ jest nieznanym parametrem. Rozważamy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy

$H_0: \ \theta = 0$ przeciw hipotezie alternatywnej:

$H_1: \ \theta > 0$

na poziomie istotności α, gdzie $\alpha < 0.5$, oparty na pojedynczej obserwacji X. Funkcja mocy tego testu $\beta(\theta)$ osiąga wartość 0.75 dla θ równego:

(A) $-\ln\alpha$

(B) $\ln\frac{3}{4} - \ln\alpha$

(C) $-\ln\left(\frac{3}{4} \cdot \alpha\right)$

(D) $-\ln\frac{\alpha}{4}$

(E) $-\ln(2 \cdot \alpha)$

$$f_0(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$P(\text{odrzucam } H \mid H_0) = P(X > c \mid \theta = 0) = \int_c^\infty \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \left| \begin{matrix} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_c^\infty \frac{1}{2} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \Big|_c^\infty = \frac{1}{2} e^{-c} < 0,5$$

$$e^{-c} < 1 \quad | \ln$$

$$-c < \ln(1)$$

$$c > -\ln(1)$$

$$c > 0$$

Obliczmy ile musi wynosić c w zależności od α:

$$\frac{1}{2} e^{-c} = \alpha$$

$$e^{-c} = 2\alpha$$

$$-c = \ln(2\alpha)$$

$$c = \ln\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$$

Obszar krytyczny:

$$K = \left\{ X : X > \ln\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \right\}$$

Moc testu:

Dla $\theta < c$:

$$P_1(K) = \int_{\ln(\frac{1}{2\alpha})}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|} dx = \int_{\ln\frac{1}{2\alpha}}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x+\theta} dx = -\frac{1}{2} e^{-x+\theta} dx \Big|_{\ln\frac{1}{2\alpha}}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{\ln(2\alpha)} e^{\theta} = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha e^{\theta} = \alpha e^{\theta}$$

$$\alpha e^{\theta} = 0{,}75$$

$$e^{\theta} = \frac{3}{4\alpha}$$

$$\theta = \ln\left(\frac{3}{4\alpha}\right) > \ln\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$$ więc odpada

Dla $\theta > c$:

$$P_1(K) = \int_{\ln\frac{1}{2\alpha}}^{\theta} \frac{1}{2} e^{x-\theta} dx + \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{2} e^{\theta-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{x-\theta} \Big|_{\ln\frac{1}{2\alpha}}^{\theta} - \frac{1}{2} e^{\theta-x} \Big|_{\theta}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\ln\frac{1}{2\alpha}} e^{-\theta} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\alpha} e^{-\theta} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4\alpha} e^{-\theta} = 0{,}75$$

$$0{,}25 = \frac{1}{4\alpha} e^{-\theta} \quad | \cdot 4\alpha$$

$$\alpha = e^{-\theta}$$

$$-\theta = \ln\alpha$$

$$\theta = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) > \ln\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$$ szukany wynik

$$\theta = -\ln(\alpha)$$

A

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \dots, X_8$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego z wartością oczekiwaną θ i wariancją 1. Nieznany parametr θ jest, z kolei, zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją 1. Rozważamy Bayes'owski przedział ufności dla parametru θ, to znaczy:
przedział $[a, b]$, gdzie $a = a(X_1, X_2, \dots, X_8)$, $b = b(X_1, X_2, \dots, X_8)$, taki, że:
$\Pr(\theta < a | X_1, X_2, \dots, X_8) = 0.05 = \Pr(\theta > b | X_1, X_2, \dots, X_8)$.

Jeśli przyjmiemy oznaczenie: $\overline{X} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^{8} X_i$, to przedział $[a, b]$ przybiera postać:

(A) $[\overline{X} - 0.548, \quad \overline{X} + 0.548]$

(B) $[\overline{X} - 0.427, \quad \overline{X} + 0.427]$

(C) $\left[\frac{8}{9}\overline{X} - 0.548, \quad \frac{8}{9}\overline{X} + 0.548\right]$

(D) $\left[\frac{8}{9}\overline{X} - 0.427, \quad \frac{8}{9}\overline{X} + 0.427\right]$

(E) $[\overline{X} - 0.427, \quad \overline{X} + 0.548]$

$X_i \sim N(\theta, 1) \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right\}$

$\theta \sim N(0,1)$

$$P(\theta | X_1, \dots, X_8) = \frac{P(X_1, \dots, X_8 | \theta) f_\theta(\theta)}{P(X_1, \dots, X_8)} =$$

| wiemy, że dostaniemy gęstość jakiegoś rozkładu, więc wszystko bez θ można wrzucić do stałej c |

$$= c \cdot \prod_{i=1}^{8} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}\right\}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\right\} =$$

$$= c \cdot \prod_{i=1}^{8} \left[\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(x_i^2 - 2\theta x_i + \theta^2)\right\}\right] \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\right\} =$$

$$= c \cdot \prod_{i=1}^{8} \left[\exp\left\{-\frac{x_i^2}{2} + \theta x_i - \frac{\theta^2}{2}\right\}\right] \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\right\} =$$

$$= c \cdot \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} x_i^2\right\} \cdot \exp\left\{8\theta\overline{X} - 4\theta^2 - \frac{\theta^2}{2}\right\} =$$

$$= c \cdot \exp\left\{8\overline{X}\theta - \tfrac{9}{2}\theta^2\right\} = c \cdot \exp\left\{-\tfrac{9}{2}\theta^2 + 8\overline{X}\theta - \tfrac{32}{9}\overline{X}^2\right\} =$$

$$= c \cdot \exp\left\{-\tfrac{9}{2}\left(\theta^2 - \tfrac{16}{9}\theta\overline{X} + \tfrac{64}{81}\overline{X}^2\right)\right\} =$$

$$= c \cdot \exp\left\{-\frac{9}{2}\left(\theta - \frac{8}{9}\bar{X}\right)^2\right\} = c \cdot \exp\left\{-\frac{\left(\theta - \frac{8}{9}\bar{X}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{9}}\right\}$$

Wygląda na gęstość rozkładu $N\left(\frac{8}{9}\bar{X}; \frac{1}{9}\right)$ czyli bez liczenia $c = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}$

$$P(a \leq \theta \leq b \mid X_1, \ldots, X_8) = 0{,}9$$

Budujemy przedział postaci:

$$\left[\frac{8}{9}\bar{X} - c; \frac{8}{9}\bar{X} + c\right]$$

$$P\left(\frac{8}{9}\bar{X} - c \leq \theta \leq \frac{8}{9}\bar{X} + c \mid X_1, \ldots, X_8\right) = P\left(-c \leq \theta - \frac{8}{9}\bar{X} \leq c \mid X_1, \ldots, X_8\right) =$$

$$= P\left(-3c \leq 3\left(\theta - \frac{8}{9}\bar{X}\right) \leq 3c\right) = \Phi(3c) - \Phi(-3c) = 2\Phi(3c) - 1$$

$$2\Phi(3c) - 1 = 0{,}9$$

$$\Phi(3c) = \frac{1{,}9}{2}$$

$$3c = \Phi^{-1}(0{,}95)$$

$$c = 0{,}548$$

Ostatecznie:

$$\left[\frac{8}{9}\bar{X} - 0{,}548; \frac{8}{9}\bar{X} + 0{,}548\right]$$

C

Zadanie 9. Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów $\{e_1, e_2, e_3\}$ i macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że w chwili 0 łańcuch znajduje się w stanie e_1. Niech T oznacza chwilę, w której łańcuch po raz pierwszy znajdzie się w stanie e_2. Wartość oczekiwana zmiennej losowej T wynosi:

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) ∞

(E) $\frac{2}{3}$

$P(\text{wyjścia z } e_1) = \frac{1}{3}$

$P(\text{zostania w } e_1) = \frac{2}{3}$

$P(X_n = e_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$

$EX_n = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$

$A = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots$

$A - \frac{2}{3}A = 1 - \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots =$

$= 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$

$\frac{1}{3}A = 3$

$A = 9$

$EX_n = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$

C

Zadanie 10. $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(400)}$ jest próbą losową z pewnego rozkładu ciągłego o wariancji σ^2, ustawioną w porządku niemalejącym, tzn. tak, że $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(400)}$. Niech m będzie medianą rozważanego rozkładu. Przybliżona (na podstawie Centralnego Twierdzenia Granicznego), wartość $\Pr\left(X_{(220)} \le m\right)$ wynosi:

(A) 0.0149

(B) 0.0049

(C) 0.0532

(D) 0.0256

(E) $\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)$, gdzie Φ jest dystrybuantą standaryzowanej zmiennej normalnej

$P(X \le m) = \frac{1}{2}$

Warunek oznacza, że wylosowało się co najmniej 220 X-ów poniżej mediany czyli w schemacie Bernoulliego było co najmniej 220 sukcesów.

$X \sim Bin(400; 0{,}5)$

$$P(X_{(220)} \le m) = P(X \geqslant 220) = \sum_{i=220}^{400} \binom{400}{i} 0{,}5^{400}$$

lub

$$P(X \geqslant 220) = 1 - P(X < 220) = 1 - P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{220 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{220-200}{10}\right) = 1 - \Phi(2) = 0{,}0256$$

D