

Zadanie 1. Wiadomo, że A, B i C są trzema zdarzeniami losowymi takimi, że:

$$\Pr(A) = \frac{2}{5}, \quad \Pr(B|A) = \frac{1}{4}, \quad \Pr(C|A \cap B) = \frac{1}{2},$$

$$\Pr(A \cup B) = \frac{6}{10}, \quad \Pr(C|B) = \frac{1}{3}.$$

Ile wynosi $\Pr(A|B \cap C)$?

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{10}$

(E) Podane informacje nie wystarczają do udzielenia odpowiedzi

$$\Pr(A|B \cap C) = \frac{\Pr(A \cap B \cap C)}{\Pr(B \cap C)}$$

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)}$$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) \Pr(A)$$

$$\Pr(C|A \cap B) = \frac{\Pr(A \cap B \cap C)}{\Pr(A \cap B)}$$

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(C|A \cap B) \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(C|A \cap B) \Pr(B|A) \Pr(A)$$

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

$$\Pr(C|B) = \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(B \cap C) = \Pr(C|B) \Pr(B)$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(B) = \Pr(A \cup B) - \Pr(A) + \Pr(A \cap B)$$

$$\Pr(B) = \Pr(A \cup B) - \Pr(A) + \Pr(B|A) \Pr(A)$$

$$\Pr(B) = \frac{6}{10} - \frac{4}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(A|B \cap C) = \frac{1}{20} \cdot 10 = \frac{1}{2}$$

①

Zadanie 2. Niech $U_1, U_2, \dots, U_n$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale (a, b) . Rozważmy zmienne losowe $X = \min\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ oraz $Y = \max\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$. Współczynnik korelacji liniowej $\text{Corr}(X, Y)$ wynosi:

(A) $-\frac{1}{n}$

(B) $\frac{1}{n}$

(C) $\frac{1}{n-1}$

(D) $\frac{(b-a)^2}{n-1}$

(E) 0

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E_{XY} - E_X E_Y}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$X_i \sim U(0, 1)$$

$$U_i = (b-a)X_i + a \sim U(a, b)$$

$$X = \min(U_1, \dots, U_n) = (b-a) \min(X_1, \dots, X_n) + a$$

$$Y = \max(U_1, \dots, U_n) = (b-a) \max(X_1, \dots, X_n) + a$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}((b-a) \min(X_1, \dots, X_n) + a, (b-a) \max(X_1, \dots, X_n) + a) &= \\ &= \text{Corr}(\min(X_1, \dots, X_n), \max(X_1, \dots, X_n)) \end{aligned}$$

$$X_m = \min(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Beta}(1, n)$$

$$Y_m = \max(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Beta}(n, 1)$$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$$f_{X_m Y_m}(x, y) = n! \frac{(y-x)^{n-2}}{(n-2)!} \quad \text{dla } x < y \quad (\text{wynik z teorii})$$

$$E X_m Y_m = \int_0^1 \int_0^{1-x} x y \cdot \frac{n!}{(n-2)!} (y-x)^{n-2} dy dx =$$

$$= \int_0^1 \int_x^1 x \frac{n!}{(n-2)!} y (y-x)^{n-2} dy dx = \left| \begin{array}{l} y-x = t \\ dy = dt \\ y = t+x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!} \int_0^1 x \int_0^{1-x} (t+x) t^{n-2} dt dx = \frac{n!}{(n-2)!} \int_0^1 x \int_0^{1-x} t^{n-1} + x t^{n-2} dt dx =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!} \int_0^1 x \left[\frac{t^n}{n} + \frac{x t^{n-1}}{n-1} \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!} \int_0^1 \frac{x(1-x)^n}{n} + \frac{x^2(1-x)^{n-1}}{n-1} dx = \left| \begin{array}{l} 1-x = t \\ -dx = dt \end{array} \right. \quad x = 1-t \quad \Big| =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!} \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{n} + \frac{(1-2t+t^2)t^{n-1}}{n-1} dt =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!} \int_0^1 \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n} + \frac{t^{n-1}}{n-1} - \frac{2t^n}{n-1} + \frac{t^{n+1}}{n-1} dt =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!} \left[\frac{t^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{t^{n+2}}{n(n+2)} + \frac{t^n}{(n-1)n} - \frac{2t^{n+1}}{(n-1)(n+1)} + \frac{t^{n+2}}{(n-1)(n+2)} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)! \cdot (n-1)n} \left[\frac{n-1}{n+1} - \frac{n-1}{n+2} + 1 - \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+2} \right] =$$

$$= \frac{n-1-2n}{n+1} + \frac{n-n+1}{n+2} + 1 = \frac{-n-1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{-\cancel{(n+1)}(n+2) + \cancel{1} + \cancel{(n+1)}(n+2)}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{1}{n+2}$$

$$EX_m = \frac{1}{n+1} \quad \text{Var}(X_m) = \frac{n}{(1+n)^2(n+2)}$$

$$EY_m = \frac{n}{n+1} \quad \text{Var}(Y_m) = \frac{n}{(1+n)^2(n+2)}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(1+n)^2(n+2)}$$

$$\text{Corr} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(1+n)^2(n+2)} \cdot \frac{\cancel{(1+n)^2(n+2)}}{n} = \frac{\cancel{n^2} + 2\cancel{n} + 1 - \cancel{n^2} - 2\cancel{n}}{n} = \frac{1}{n}$$

(B)

Zadanie 3. Niech $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ będzie próbą niezależnych realizacji z dwuwymiarowego rozkładu normalnego o wektorze wartości oczekiwanych (μ_X, μ_Y)

i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$.

Statystyka $\min \left\{ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Y_i \right\}$

jest nieobciążonym estymatorem parametru $\min\{\mu_X, \mu_Y\}$:

- (A) dla każdego ρ
- (B) tylko, jeśli $\rho = 0$
- (C) tylko, jeśli $|\rho| = 1$
- (D) tylko, jeśli $\rho = 1$
- (E) nigdy

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu_X, \frac{1}{n}) \quad Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \sim N(\mu_Y, \frac{1}{n})$$

Trzeba obliczyć $E \min(X, Y)$.

Aby estymator $\min(X, Y)$ był nieobciążony to $E \min(X, Y) = \mu_X$ przy założeniu $Y > X$ (założenie $X > Y$ jest analogiczne).

$$\text{corr} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j\right) = \left| \text{niezależność m. } X_i \text{ i } Y_j \right| = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{cov}(X_i, Y_i) = \frac{1}{n} \text{cov}(X_1, Y_1) = \frac{\rho}{n} \end{aligned}$$

$$\text{corr} = \frac{\frac{\rho}{n}}{\frac{1}{n}} = \rho$$

$$\begin{cases} X = \sigma_X Z_1 + \mu_X \\ Y = \sigma_Y (\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2) + \mu_Y \end{cases}, \text{ gdzie } Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$$

$$Y = \sigma_Y \left(\rho \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 \right) + \mu_Y$$

$$Y = \rho (X - \mu_X) + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{n}} Z_2 + \mu_Y$$

$$\sqrt{\frac{1-\rho^2}{n}} = 0$$

$$1 - \rho^2 = 0$$

$$\rho^2 = 1$$

$$\rho = 1 \vee \rho = -1$$

$$\text{Dla } \rho = -1$$

$$Y = -X + \mu_X + \mu_Y$$

przy założeniu, że $Y > X$ mamy $\mu_Y > \mu_X$ stąd $\mu_X + \mu_Y > 0$ czyli

$$Y = \mu_X + \mu_Y - X < X, \text{ nie spełnia warunków.}$$

$$\text{Dla } \rho = 1$$

$$Y = X - \mu_X + \mu_Y$$

przy założeniu, że $Y > X$ mamy $\mu_Y > \mu_X$ stąd $\mu_Y - \mu_X > 0$ czyli

$$Y = X + \mu_Y - \mu_X > X.$$

①

Zadanie 4. Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny o gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\ln x - \mu)^2\right] & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Wiadomo, że $\Pr(X \leq q) = 0.6$ oraz $\Pr(X \leq r) = 0.4$. Wynika stąd, że

(A) $E(X) = \sqrt{q \cdot r \cdot e}$

(B) $E(\ln X) = \sqrt{q \cdot r}$

(C) Podane informacje są sprzeczne

(D) $E(X) = \frac{q+r}{2}$

(E) $E(X) = \sqrt{q \cdot r}$

$$X \sim LN(a, b)$$

$$a = \mu$$

$$b = 1$$

$$EX = \exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} \Pr(X \leq q) = \Phi(\ln(q) - \mu) = 0.6 \\ \Pr(X \leq r) = \Phi(\ln(r) - \mu) = 0.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(q) = \Phi^{-1}(0.6) + \mu \\ \ln(r) = \Phi^{-1}(0.4) + \mu \end{cases} \quad | +$$

$$\ln(qr) = 2\mu + 0.253 - 0.253$$

$$\ln(qr) = 2\mu + 0.253 - 0.253$$

$$\mu = \frac{\ln(qr)}{2}$$

$$EX = \exp\left\{\frac{\ln(qr)}{2} + \frac{1}{2}\right\} = \exp\left\{\ln(qr)^{\frac{1}{2}}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} = \sqrt{qre}$$

(A)

Zadanie 5. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne i mają jednakowy rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Zmienna losowa N jest niezależna od nich i ma rozkład geometryczny:

$$\Pr(N = k) = (1 - q) \cdot q^k \quad k = 0, 1, \dots$$

Niech $S = \sum_{i=1}^N X_i$ będzie sumą losowej liczby zmiennych losowych (przyjmujemy że

$$\sum_{i=1}^0 X_i = 0).$$

Dla każdego $s > 0$ prawdą jest, że:

(A) $\text{Var}(N|S = s) = E(N|S = s) - 1$

(B) $\text{Var}(N|S = s) = E(N|S = s)$

(C) $\text{Var}(N|S = s) = \text{Var}(N) - [E(N|S = s)]^2$

(D) $\text{Var}(N|S = s) = s \cdot q^2$

(E) $\text{Var}(N|S = s) = s \cdot q$

$$X_i \sim \text{Exp}(1)$$

$$P(N=k) = (1-q) q^k \quad k = 0, 1, \dots$$

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

$$S|N=n \sim \text{Gamma}(n, 1)$$

$$\begin{aligned} P(N=n|S=s) &= c \cdot f(S=s|N=n) P(N=n) = c \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-s} (1-q) q^n = \\ &= c \cdot \frac{1}{(n-1)!} s^{n-1} q^n = c \cdot \frac{(sq)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Funkcja p-owa wygląda jak przesunięty rozkład Poiss(1) czyli mamy zm. los. $Y = X + 1$ gdzie $X \sim \text{Poiss}(1)$

$$E[N|S=1] = sq + 1$$

$$\text{Var}(N|S=1) = sq$$

$$\text{Var}(N|S=1) = E[N|S=1] - 1$$

(A)

Zadanie 6. Zmienné losowe X_1, X_2, X_3, X_4 sà niezależne i mają jednakowy rozkład normalny $N(0, \sigma^2)$. Prawdopodobieństwo $\Pr(X_1^2 - 5 \cdot X_2^2 < 5 \cdot X_3^2 - X_4^2)$ wynosi:

- (A) $\frac{4}{5}$
- (B) $\frac{4}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)$
- (C) $\frac{5}{6}$
- (D) $\frac{1}{2}$
- (E) $\frac{5 + \sigma^2}{6 + \sigma^2}$

$$\begin{aligned} P(X_1^2 - 5X_2^2 < 5X_3^2 - X_4^2) &= P(X_1^2 + X_4^2 < 5X_3^2 + 5X_2^2) = \\ &= P\left(\frac{X_1^2 + X_4^2}{X_3^2 + X_2^2} < 5\right) = \left| \begin{array}{l} X_i \sim N(0, \sigma^2) \\ \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1) \end{array} \right| = P\left(\frac{\sigma^2\left(\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{X_4^2}{\sigma^2}\right)}{\sigma^2\left(\frac{X_3^2}{\sigma^2} + \frac{X_2^2}{\sigma^2}\right)} < 5\right) = \\ &= \left| \frac{X_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1); \frac{X_1^2}{\sigma^2} + \frac{X_4^2}{\sigma^2} = Y_1 \sim \chi^2(2) \right| = P\left(\frac{Y_1}{Y_2} < 5\right) = \\ &= \left| \frac{Y_1/2}{Y_2/2} = W \sim F(2, 2) \right| \end{aligned}$$

Zm. los. W ma rozkład $F(2, 2)$, gęstość:

$$f_W(x) = \frac{\frac{\sqrt{(2x)^2 2^2}}{(2x+2)^4}}{x \cdot B(1, 1)} = \frac{\frac{4x}{(2x+2)^2}}{x} = \frac{4}{4(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$P(W < 5) = \int_0^5 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int_1^6 t^{-2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_1^6 = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6}$$

(C)

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o nieznannej wartości oczekiwanej μ . Estymujemy μ na podstawie częściowej informacji o próbie, a mianowicie na podstawie tego, iż:

- 80 zmiennych (spośród wszystkich 100 z próbki) przybrało wartości poniżej 3,
- średnia arytmetyczna z tych 80-ciu wartości wynosi 2.

Oparty na tej informacji estymator Największej Wiarygodności parametru μ przybiera wartość:

- (A) $\frac{11}{4}$
- (B) 2
- (C) $\frac{5}{2}$
- (D) 3
- (E) nie można stosować metody NW, gdyż częściowo obserwowalne zmienne nie mają gęstości prawdopodobieństwa

$$X_i \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$L = \prod_{i=1}^{80} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_i}{\mu}} \cdot \left(e^{-\frac{3}{\mu}}\right)^{20} = \frac{1}{\mu^{100}} e^{-\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{80} x_i} \cdot e^{-\frac{60}{\mu}} =$$

$$= \frac{1}{\mu^{100}} e^{-\frac{160}{\mu} - \frac{60}{\mu}} = \frac{1}{\mu^{100}} e^{-\frac{220}{\mu}}$$

$$\ln L = \ln\left(\frac{1}{\mu^{100}}\right) - \frac{220}{\mu}$$

$$\ln' L = \frac{-100 \mu^{-1}}{\mu^{-100}} + \frac{220}{\mu^2} = 0$$

$$\frac{220}{\mu^2} = \frac{100}{\mu} \quad | \cdot \mu^2$$

$$220 = 100 \mu$$

$$\hat{\mu} = \frac{11}{4}$$

(A)

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu Gamma o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-\lambda x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases} \quad p, \lambda > 0$$

Zakładamy, że parametr λ jest znany, zaś p jest nieznane. Jednostajnie najmocniejszy test hipotezy

$H_0: p = 2$ przeciw hipotezie alternatywnej:

$H_1: p > 2$

na poziomie istotności α

- (A) ma obszar krytyczny postaci $X_1 + X_2 + \dots + X_n > k$
- (B) ma obszar krytyczny postaci $\ln X_1 + \ln X_2 + \dots + \ln X_n > k$, gdzie k zależy od parametru λ i liczby α
- (C) ma obszar krytyczny postaci $\ln X_1 + \ln X_2 + \dots + \ln X_n > k$, gdzie k zależy od liczby α ale nie zależy od parametru λ
- (D) ma obszar krytyczny postaci $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 > k$
- (E) nie istnieje

$$p_2 > p_1$$

$$\frac{\left(\frac{\lambda^{p_2}}{\Gamma(p_2)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{p_2-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}}{\left(\frac{\lambda^{p_1}}{\Gamma(p_1)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{p_1-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}} = \left(\frac{\lambda^{p_2}}{\lambda^{p_1}}\right)^n \left(\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_2)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{p_2-p_1}$$

funkcja występowania statystyki $\prod_{i=1}^n x_i$

$$\prod_{i=1}^n x_i > k \Rightarrow \ln \prod_{i=1}^n x_i > \ln k \Rightarrow \sum_{i=1}^n \ln x_i > k$$

$$\ln x_1 + \dots + \ln x_n > k$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i > k\right) = \alpha$$

$$P(\ln X < t) = P(X < e^t) = \int_0^{e^t} \lambda^2 x e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda e^t} - \lambda e^t e^{-\lambda e^t}$$

$$f_{\ln(x)} = \lambda e^{2t} e^{-\lambda e^t}$$

gęstość zależy od λ więc suma tej cyfry zależy od parametru λ i liczby α

(B)

Zadanie 9. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego na odcinku (a, b) , gdzie $0 \leq a < b$. Rozważamy zagadnienie weryfikacji hipotezy

$H_0: a = 0$ przeciw hipotezie alternatywnej:

$H_1: a > 0$.

Test ilorazu wiarygodności ma obszar krytyczny o postaci:

(A) $\frac{\bar{X}^2}{s^2} > k$, gdzie: $\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

(B) $\frac{M}{s} > k$, gdzie: $M = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $s = \sqrt{s^2}$

(C) $\frac{m}{\bar{X}} > k$, gdzie: $m = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$

(D) $\frac{m}{M} > k$, gdzie m oraz M jak wyżej

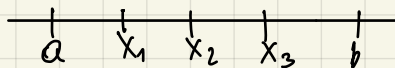
(E) $\frac{M-m}{m} > k$, gdzie m oraz M jak wyżej

$$X_i \sim U(a, b) \quad 0 \leq a < b$$

$$H_0: a = 0$$

$$H_1: a > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$



$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{b-a} \right)^n \quad \begin{matrix} b \geq \max(x_i) \\ a \leq \min(x_i) \end{matrix}$$

$$M = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$m = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$\frac{\sup(a; X)}{\sup(b; X)} = \frac{\left(\frac{1}{M-m} \right)^n}{\left(\frac{1}{M} \right)^n} = \left(\frac{M}{M-m} \right)^n > k$$

Wszystkie wzory, które nie zawierają informacji o X_i zwróć do stałej k .

$$\frac{M}{M-m} > k \Rightarrow \frac{M-m}{M} > \frac{1}{k} \Rightarrow 1 - \frac{m}{M} > \frac{1}{k}$$

$$\frac{m}{M} > k$$

(D)

Zadanie 10. Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ i macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozkład początkowy (w chwili 0) jest wektorem $[0.5 \ 0 \ 0.5 \ 0]$. Z jakim prawdopodobieństwem łańcuch znajduje się w chwili 100 (po stu przejściach) w stanie e_4 ?

- (A) 0.7
(B) 0.8
(C) 0.9
(D) 0.65
(E) 0

Interes obliczyć P^{100} :

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P^3 \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P$$

$$P^{100} = P$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.1 & 0 & 0.65 \end{bmatrix}$$

Odp. 0,65

(D)