Zadanie 1. Mamy dwóch strzelców. Prawdopodobieństwo trafienia w cel pojedynczym strzałem wynosi dla lepszego z nich 0.8, a dla gorszego 0.4. Nie wiemy, który z nich jest gorszy, a który lepszy. Testujemy strzelców poddając ich ciągowi prób, z których każda polego na oddaniu jednego strzału przez każdego z nich. Test przerywamy po pierwszej takiej próbie, w wyniku której jeden ze strzelców trafił, a drugi spudłował. Następnie ten strzelec, który w ostatniej próbie trafił, oddaje jeszcze jeden strzał. Jakie jest prawdopodobieństwo, iż tym razem także trafi w cel?

(A) 0.60

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 0.70

(D) $\frac{26}{35}$

(E) 0.78

X_1 - spudłował gorszy, trafił lepszy

X_2 - spudłował lepszy, trafił gorszy

X - jeden spudłował a drugi trafił

$P(X_1) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$

$P(X_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$

$P(X) = P(X_1) + P(X_2) = 0{,}56$

A - przy ostatnim strzale strzelec trafi w cel

L - strzela lepszy

G - strzela gorszy

$$P(L) = P(X_1 | X) = \frac{0{,}48}{0{,}56} = \frac{6}{7}$$

$$P(G) = P(X_2 | X) = \frac{0{,}08}{0{,}56} = \frac{1}{7}$$

$$P(A) = P(A|L)P(L) + P(A|G)P(G) = 0{,}8 \cdot \frac{6}{7} + 0{,}4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{26}{35}$$

D

Zadanie 2. Tarczę strzelniczą umieszczamy na płaszczyźnie ze środkiem tarczy w punkcie o współrzędnych $(0,0)$. Punkt trafienia przez strzelca w tarczę ma dwuwymiarowy rozkład normalny o wartości oczekiwanej $(0,0)$, o takiej samej wariancji obu współrzędnych i o zerowej ich kowariancji. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia przez strzelca w punkt odległy od środka tarczy o mniej niż jedno odchylenie standardowe?

(A) $1-\exp(-0.5)$

(B) $(e-1)^{-1}$

(C) $1-\exp(-1)$

(D) $\exp(-1)$

(E) $\exp(-0.5)$

Gęstość rozkładu z zadania:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right\}$$

Trzeba obliczyć pole obszaru spełniającego warunek $\sqrt{x^2+y^2} < \sigma$

Współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} < \sigma$$
$$r < \sigma$$

$$|J| = r$$

$$P = \iint \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sigma}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} r\,dr\,d\varphi = \left|\begin{matrix} r^2 = t \\ 2r\,dr = dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}dt\,d\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi} -2\sigma^2\exp\left\{-\frac{t}{2\sigma^2}\right\}\Big|_0^{\sigma^2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -e^{-\frac{1}{2}} + 1\,d\varphi = \frac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi} = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

A

Zadanie 3. Oblicz $\Pr(\min\{k_1, k_2, k_3\} = 3)$ jeśli k_1, k_2, k_3 to liczby oczek uzyskane w wyniku rzutu trzema (uczciwymi) kostkami do gry.

(A) $\frac{36}{216}$

(B) $\frac{37}{216}$

(C) $\frac{38}{216}$

(D) $\frac{39}{216}$

(E) $\frac{40}{216}$

Najłatwiej rozpatrzyć wszystkie przypadki.

$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Trójka na jednej kostce: $\binom{3}{1} \cdot 3 \cdot 3$ bo na dwóch pozostałych może być 4, 5, 6.

Trójka na dwóch kostkach: $\binom{3}{2} \cdot 3$

Trójka na trzech kostkach: 1

Razem: $3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 = 37$

$P(\min(k_1, k_2, k_3)) = \frac{37}{216}$

B

Zadanie 4. Funkcja gęstości dana jest wzorem:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } (x,y)\in(0,1)\times(0,1) \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

$E\left(X \middle| Y = \frac{1}{2}\right)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{7}{12}$

(E) $\frac{2}{3}$

$$f_{X,Y}(x,y) = x+y$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 x+y\,dx = \frac{x^2}{2} + xy \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + y$$

$$f_{X|Y}(x|\tfrac{1}{2}) = \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}$$

$$E[X|Y=\tfrac{1}{2}] = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2}x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

D

Zadanie 5. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości λ, który chcemy oszacować. Niestety możemy obserwować jedynie zmienną losową M, która przyjmuje wartość zero jeśli N równa jest zero, a wartość jeden jeśli N jest większa od zera. Średnią arytmetyczną z próbki niezależnych obserwacji na zmiennej M oznaczmy przez $\overline{m}$. Uzyskany metodą największej wiarygodności estymator parametru λ ma postać:

(A) $\frac{\overline{m}}{1-\overline{m}}$

(B) $\exp(-\overline{m})$

(C) $-\ln\overline{m}$

(D) $\ln\left(\frac{1}{1-\overline{m}}\right)$

(E) $\exp(\overline{m}-1)$

$$P(M=0) = P(N=0) = e^{-\lambda}$$

$$P(M=1) = P(N>0) = 1-e^{-\lambda}$$

$$L = [e^{-\lambda}]^{n-\sum M_i} \; [1-e^{-\lambda}]^{\sum M_i}$$

$$\ln L = -\lambda n + \lambda \sum M_i + \sum M_i \cdot \ln(1-e^{-\lambda})$$

$$\ln' L = -n + \sum M_i + \frac{e^{-\lambda}\sum M_i}{1-e^{-\lambda}} = 0$$

$$\frac{e^{-\lambda}\sum M_i}{1-e^{-\lambda}} = n - \sum M_i$$

$$\cancel{e^{-\lambda}\sum M_i} = n - \sum M_i - e^{-\lambda} n + \cancel{e^{-\lambda}\sum M_i}$$

$$n e^{-\lambda} = n - \sum M_i \quad | : n$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \overline{m} \quad | \ln$$

$$-\lambda = \ln(1-\overline{m})$$

$$\lambda = \ln\left(\frac{1}{1-\overline{m}}\right)$$

D

Zadanie 6. Testujemy niezależność dwóch cech z tablicy kontyngencyjnej. Jedna z cech przyjmuje n, a druga m możliwych wartości. Ilość obserwacji w każdej z $(n \cdot m)$ celek (klatek, komórek) jest wystarczająca, aby zastosować test niezależności chi-kwadrat. Odpowiednia statystyka będzie miała rozkład (asymptotyczny) chi-kwadrat o ilości stopni swobody równej:

(A) $(n-2)\cdot(m-2)$

(B) $(n-2)\cdot(m-2)+1$

(C) $(n-2)\cdot(m-2)+2$

(D) $(n-1)\cdot(m-1)-1$

(E) $(n-1)\cdot(m-1)$

TW. Statystyka testowa ma postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}.$$

Statystyka ta ma asymptotycznie rozkład χ^2 z liczbą stopni swobody wyznaczoną według wzoru: $df = (r-1)(c-1)$.

Czyli w zadaniu $df = (n-1)(m-1)$

E

Zadanie 7. Sygnały pojawiają się w czasie zgodnie z procesem Poissona, a oczekiwana ilość sygnałów na jednostkę czasu wynosi λ. Obserwujemy proces od momentu T_0 do momentu T_n pojawienia się n-tego sygnału, przy czym n jest z góry ustaloną liczbą całkowitą równą co najmniej 2. Nieobciążonym estymatorem parametru λ jest:

(A) $\dfrac{T_n - T_0}{n}$

(B) $\dfrac{n}{T_n - T_0}$

(C) $\dfrac{n-1}{T_n - T_0}$

(D) $\dfrac{T_n - T_0}{n-1}$

(E) $\dfrac{n-0.5}{T_n - T_0}$

TW. Jeśli $N(t)$ jest procesem Poissona z współczynnikiem λ, wtedy czas pomiędzy zdarzeniami $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i $X_i \sim Exp(\lambda)$, dla $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Wzór: $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$

$T = T_n - T_0 \sim$ gamma (n, λ)

$$E\left[\alpha \frac{1}{T}\right] = \alpha \int_0^\infty \frac{1}{t} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\alpha \lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-1-1} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \frac{\alpha \lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}} = \frac{\alpha \lambda}{n-1}$$

$$\frac{\alpha \lambda}{n-1} = \lambda \Rightarrow \alpha = n-1$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n-1}{T_n - T_0}$$

C

Zadanie 8. Zmienna losowa (X_1, X_2, X_3) ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $(0, 0, 0)$ i macierzą kowariancji $\begin{bmatrix} 4 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$.

Jeśli występująca w równaniu:

$X_1 = a \cdot X_2 + b \cdot X_3 + E$

zmienna losowa E ma być nieskorelowana ze zmiennymi losowymi (X_2, X_3), to współczynnik a musi wynieść:

(A) 1

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) 2

(E) $\frac{7}{3}$

EV - wartość oczekiwana

$$\begin{cases} cov(E, X_2) = 0 \\ cov(E, X_3) = 0 \end{cases} \qquad cov(E, X_2) = EV[E X_2] - EV[E] EX_2 = EV[E X_2]$$

$$\begin{cases} EV[E X_2] = 0 \\ EV[E X_3] = 0 \end{cases}$$

$$E = X_1 - a X_2 - b X_3$$

$$EV[E] = 0$$

$$\begin{cases} EV[X_2(X_1 - a X_2 - b X_3)] = 0 \\ EV[X_3(X_1 - a X_2 - b X_3)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EV[X_1 X_2 - a X_2^2 - b X_2 X_3] = 0 \\ EV[X_1 X_3 - a X_2 X_3 - b X_3^2] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} EV[X_1 X_2] - a EV[X_2^2] - b EV[X_2 X_3] = 0 \\ EV[X_1 X_3] - a EV[X_2 X_3] - b EV[X_3^2] = 0 \end{cases}$$

$$EV[X_1 X_2] = Cov(X_1, X_2) + EV[X_1] EV[X_2]$$

$$EV[X_2^2] = Var(X_2) + (EV[X_2])^2$$

$$\begin{cases} 1{,}5 - a - 0{,}5b = 0 & | \cdot 2 \\ 1 - 0{,}5a - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - 2a - b = 0 \\ 1 - 0{,}5a - b = 0 & | - \end{cases}$$

$$2 - 1{,}5a = 0$$

$$1{,}5a = 2$$

$$a = \frac{4}{3}$$

B

Zadanie 9. Pobraliśmy 100 niezależnych obserwacji z rozkładu normalnego o nieznanej wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2. Nasz pracownik obliczył 10 sum po 10 kolejnych obserwacji a następnie zgubił dane źródłowe.
Zamiast więc pierwotnych obserwacji $(x_1, x_2, \dots, x_{100})$ mamy obserwacje $(y_1, y_2, \dots, y_{10})$, gdzie: $y_i = \sum_{j=0}^{9} x_{10 \cdot i - j}$.

Szacujemy wariancję σ^2 używając estymatora postaci: $const \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2$. Estymator ten jest nieobciążony wtedy i tylko wtedy, kiedy stała *const* równa jest:

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{1}{9 \cdot \sqrt{10}}$

(C) $\frac{1}{81}$

(D) $\frac{1}{90}$

(E) $\frac{1}{99}$

$n = 100$

$(y_1, \dots, y_{10})$, gdzie $y_i = \sum_{j=0}^{9} x_{10i-j}$

$$E\left[\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{10} (y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{10} (y_i^2) - \bar{y}^2\right] =$$

$$\left| \begin{array}{l} y_i \sim N(10\mu, 10\sigma^2) \\ \bar{y} \sim N(10\mu, \sigma^2) \end{array} \right|$$

$$= 10(100\mu^2 + 10\sigma^2) - 10(100\mu^2 + \sigma^2) = 1000\mu^2 + 100\sigma^2 - 1000\mu^2 - 10\sigma^2 =$$

$$= 90\sigma^2$$

$$c \cdot 90\sigma^2 = \sigma^2$$

$$c = \frac{1}{90}$$

D

Zadanie 10. Niech X ma funkcję gęstości:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot x + 0.5 & \text{dla } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

gęstość $f_Y(y)$ zmiennej losowej $Y = X^2$ dana jest dla $y \in (0,1)$ wzorem:

(A) $\frac{1}{2\sqrt{y}}$

(B) $2 \cdot y$

(C) $\frac{3}{2} - y$

(D) $\frac{4}{3} - y^2$

(E) $\frac{1}{(y+1) \cdot \ln 2}$

$$f_X(x) = 0{,}5x + 0{,}5 \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

$$P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{y}{4} + \frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{y}{4} + \frac{\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y}$$

$$f_Y(y) = (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

A