Zadanie 1. O zdarzeniach A, B, C z pewnej przestrzeni uzyskaliśmy informacje, iż następujące prawdopodobieństwa: $\Pr(A|B\cap C)$, $\Pr(B|A\cap C)$ oraz $\Pr(C|A\cap B)$ są określone i wynoszą odpowiednio: 0.6, 0.3 oraz 0.9. $\Pr\left[(A\cap B\cap C)|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]$ wynosi:

(A) 0.3000

(B) $\dfrac{9}{37}$

(C) $\dfrac{9}{55}$

(D) uzyskane informacje nie wystarczają do udzielenia jednoznacznej odpowiedzi

(E) odpowiedzi udzielić się nie da, bo uzyskane informacje są nawzajem sprzeczne

Wzory: $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$,

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P[(A\cap B\cap C)|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)] =$$

$$= \frac{P[(A\cap B\cap C)\cap[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)]]}{P[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)]} =$$

$$= \frac{P[(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)]}{P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)-3P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap C)} =$$

$$= \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)-2P(A\cap B\cap C)} =$$

$$P(A|B\cap C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A|B\cap C)P(B\cap C) = P(B|A\cap C)P(A\cap C) = P(C|A\cap B)P(A\cap B) =$$

$$= 0{,}6P(A\cap C) = 0{,}3P(A\cap C) = 0{,}9P(A\cap B)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{0{,}9}+\frac{1}{0{,}3}+\frac{1}{0{,}6}-2} = \frac{9}{37}$$

B

Zadanie 2. Mamy 4 urny, a w każdej z nich po 4 kule, przy czym w urnie *k-tej* jest *k* kul czarnych i (4-*k*) kul białych. Wybieramy przypadkowo (z równym prawdopodobieństwem wyboru) jedną z 4 urn. Z wybranej urny wyciągnęliśmy kulę czarną. Odkładamy ją na bok i z tej samej urny ciągniemy drugą kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy znów kulę czarną?

(A) $\frac{5}{12}$

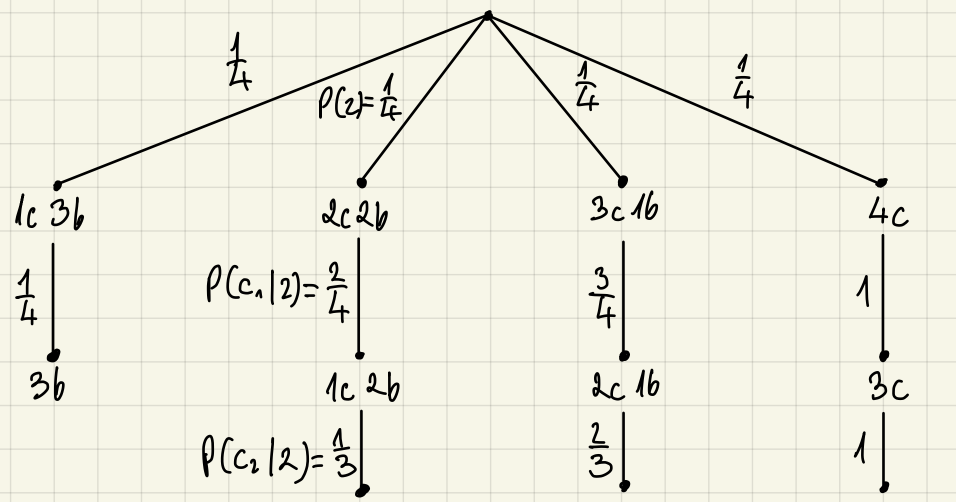
(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{3}{4}$

Wzory: $P(A|B) = \sum_{k=1}^{n} P(A|C_k)P(C_k|B)$; $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$



c_1 - czarna kula w pierwszym wyciągnięciu

c_2 - czarna kula w drugim wyciągnięciu

k - numer urny

$$P(c_2|c_1) = \sum_{k=1}^{4} P(c_2|k)P(k|c_1)$$

$P(c_2|1) = 0$

$P(c_2|2) = \frac{1}{3}$

$P(c_3|3) = \frac{2}{3}$

$P(c_4|4) = 1$

$$P(k|c_1) = \frac{P(c_1|k)P(k)}{P(c_1)}$$

$$P(c_1) = \sum_{k=1}^{4} P(c_1|k)P(k) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$P(1|c_1) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{10}$$

$$P(2|c_1) = \frac{1}{5}$$

$$P(3|c_1) = \frac{3}{10}$$

$$P(4|c_1) = \frac{2}{5}$$

$$P(c_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10} + 1\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{3}$$

D

Zadanie 3. Pobieramy 8 niezależnych realizacji jednowymiarowej zmiennej losowej o nieznanym (ale ciągłym) rozkładzie. Po uporządkowaniu zaobserwowanych wartości w ciąg rosnący $\{z_1, \ldots, z_8\}$ tworzymy przedział (z_2, z_7). Z jakim prawdopodobieństwem tak określony przedział pokrywa wartość mediany rozkładu badanej zmiennej losowej?

(A) $\frac{110}{128}$

(B) $\frac{112}{128}$

(C) $\frac{119}{128}$

(D) $\frac{120}{128}$

(E) $\frac{127}{128}$

Mediana: $P(X \le m) \geq \frac{1}{2}$ i $P(X \ge m) \geq \frac{1}{2}$

Dystrybuanta i-tej statystyki pozycyjnej: $F_{X_i}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} [F_X(x)]^k [1 - F_X(x)]^{n-k}$

$P(X \le m) = F_X(m) = \frac{1}{2}$

$P(X \ge m) = 1 - F_X(m) = \frac{1}{2}$

$P(X_2 \le m \le X_7) = P(X_2 \le m) - P(X_7 \le m) = F_{X_2}(m) - F_{X_7}(m)$

$F_{X_{(i)}} = \sum_{k=i}^{8} \binom{8}{k} [F_X(m)]^k [1 - F_X(m)]^{8-k} = \sum_{k=i}^{8} \binom{8}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$P(X_2 \le m \le X_7) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left[\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} - \binom{8}{7} - \binom{8}{8}\right] = \frac{119}{128}$

C

Zadanie 4. Funkcja gęstości dana jest wzorem:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}x+2xy+\frac{1}{4}y & \text{dla } (x,y)\in(0,1)\times(0,1)\\ 0 & \text{poza tym}\end{cases}$$

$\Pr\left(X>\frac{1}{2}\middle|Y>\frac{1}{2}\right)$ wynosi:

(A) $\frac{5}{7}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{7}{9}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{9}{11}$

Wzór: $P(X>x \mid Y>y)=\frac{P(X>x,\, Y>y)}{P(Y>y)}$

$$f(y)=\int_0^1 \frac{3}{4}x+2xy+\frac{1}{4}y\,dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+2y\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}yx\Big|_0^1=$$

$$=\frac{3}{8}+y+\frac{1}{4}y=\frac{5}{4}y+\frac{3}{8}$$

$$P(X>\tfrac{1}{2},\, Y>\tfrac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{4}x+2xy+\frac{1}{4}y\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{8}x^2+yx^2+\frac{1}{4}yx\Big|_{\frac{1}{2}}^1\,dy=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{8}+y+\frac{1}{4}y-\frac{3}{32}-\frac{1}{4}y-\frac{1}{8}y\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{7}{8}y+\frac{9}{32}\,dy=\frac{15}{32}$$

$$P(Y>\tfrac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{5}{4}y+\frac{3}{8}\,dy=\frac{21}{32}$$

$$P(X>\tfrac{1}{2}\mid Y>\tfrac{1}{2})=\frac{15}{32}\cdot\frac{32}{21}=\frac{5}{7}$$

C

Zadanie 5. Rozkład warunkowy zmiennej S (równej $X_1 + \cdots + X_N$) przy danym $\Lambda = \lambda$ jest złożonym rozkładem Poissona z parametrem częstotliwości λ oraz z rozkładem wykładniczym składnika sumy (X_i) o wartości oczekiwanej równej 2.

Rozkład brzegowy zmiennej Λ dany jest funkcją prawdopodobieństwa : $\Pr(\Lambda = 1) = \frac{3}{4}$, $\Pr(\Lambda = 2) = \frac{1}{4}$. Wariancja (z rozkładu bezwarunkowego) zmiennej S wynosi:

(A) 5

(B) 10

(C) $10\frac{3}{4}$

(D) $15\frac{7}{8}$

(E) 17

Wzór: $Var(X) = Var(E[X|Y]) + E[Var(X|Y)]$

Wartość oczekiwana w złożonym rozkładzie Poissona: $EX = \lambda EY$

Wariancja w złożonym rozkładzie Poissona: $Var(X) = \lambda(Var(Y) + (EY)^2)$

$Var(S) = Var(E[S|\Lambda]) + E[Var(S|\Lambda)]$

$E[S|\Lambda] = 2\lambda$

$Var(S|\Lambda) = \lambda \cdot (4+4) = 8\lambda$

$Var(S) = Var(2\Lambda) + E[8\Lambda] = 4\,Var(\Lambda) + 8\,E\Lambda$

$E\Lambda = 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$

$E\Lambda^2 = 1 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$

$Var(\Lambda) = \frac{7}{4} - \frac{25}{16} = \frac{3}{16}$

$Var(S) = 4 \cdot \frac{3}{16} + 8 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4} + 10 = 10\frac{3}{4}$

C

Zadanie 6. Niech $x_1,\dots,x_n$ będą niezależnymi realizacjami zmiennej losowej normalnej o nieznanej średniej i wariancji. Rozpatrzmy klasę estymatorów wariancji określonych wzorem $S(c) = c\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią z próbki, a c jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą. Wartość c, przy której błąd średniokwadratowy *(Mean Square Error)* estymatora $S(c)$ osiąga minimum, wynosi:

(A) $\frac{1}{n-1}$

(B) $\frac{1}{n-\frac{1}{2}}$

(C) $\frac{1}{n}$

(D) $\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$

(E) $\frac{1}{n+1}$

$$S(c) = c\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$MSE(S) = Var(S) + (B(S))^2$$

$$S(c) = c\sigma^2 \underbrace{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}_{\chi^2(n-1)}$$

$$Var(S) = Var(c\sigma^2 X) = c^2\sigma^4 Var(X) = c^2\sigma^4 2(n-1)$$

$$E(S) = E(c\sigma^2 X) = c\sigma^2 E(X) = c\sigma^2(n-1)$$

$$B(S) = E(S) - \sigma^2 = c\sigma^2(n-1) - \sigma^2 = \sigma^2(cn-c-1)$$

$$(B(S))^2 = \sigma^4(cn-c-1)^2 \qquad (cn-c-1)(cn-c-1)$$

$$MSE(S) = 2c^2\sigma^4(n-1) + \sigma^4(cn-c-1)^2 =$$

$$= 2c^2\sigma^4(n-1) + \sigma^4(c^2n^2 + c^2 + 1 - 2c^2n - 2cn + 2c)$$

$$MSE'(S) = 4c\sigma^4(n-1) + \sigma^4(2cn^2 + 2c - 4cn - 2n + 2) = 0 \quad /:\sigma^4$$

$$4c(n-1) + 2cn^2 + 2c - 4cn = 2n - 2 \quad /:2$$

$$2c(n-1) + cn^2 + c - 2cn = n - 1$$

$$c(\cancel{2n} - 2 + n^2 + 1 - \cancel{2n}) = n - 1$$

$$c(n^2 - 1) = n - 1$$

$$c = \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{n-1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

E

Zadanie 7. Niech $x_1,\dots,x_n$ będzie próbką niezależnych obserwacji z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,\varphi)$ z nieznanym prawym końcem przedziału φ. Estymator $\frac{n+1}{n}\cdot\max\{x_1,\dots,x_n\}$ jest nieobciążony. Jego wariancja wynosi:

(A) $\frac{\varphi^2}{n(n+2)}$

(B) $\frac{\varphi^2}{(n+1)(n+2)}$

(C) $\frac{\varphi^2}{6n}$

(D) $\frac{\varphi^2}{2n^2}$

(E) $\frac{\varphi^2}{12n}$

$$X_1,\dots,X_n \sim U(0,\varphi)$$

$$Var\left(\frac{n+1}{n}\max\{X_1,\dots,X_n\}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} Var(\max\{X_1,\dots,X_n\})$$

$$F_X(x) = \frac{x}{\varphi}$$

$$F_{max}(x) = \left(\frac{x}{\varphi}\right)^n$$

$$E(max) = \int_0^\varphi 1-\left(\frac{x}{\varphi}\right)^n dx = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)\varphi^n}\Bigg|_0^\varphi =$$

$$= \varphi - \frac{\varphi^{n+1}}{(n+1)\varphi^n} = \frac{\varphi^{n+1}(n+1) - \varphi^{n+1}}{(n+1)\varphi^n} = \frac{n\varphi^{n+1}}{(n+1)\varphi^n} = \frac{n\varphi}{n+1}$$

$$E(max^2) = \int_0^\varphi 2x - 2x\left(\frac{x}{\varphi}\right)^n dx = \int_0^\varphi 2x - \frac{2}{\varphi^n}x^{n+1} dx =$$

$$= \frac{2x^2}{2} - \frac{2}{\varphi^n}\frac{x^{n+2}}{n+2}\Bigg|_0^\varphi = \varphi^2 - \frac{2\varphi^{n+2}}{\varphi^n(n+2)} = \frac{\varphi^{n+2}(n+2) - 2\varphi^{n+1}}{(n+2)\varphi^n} =$$

$$= \frac{n\varphi^{n+2}}{(n+2)\varphi^n} = \frac{n\varphi^2}{n+2}$$

$$Var(max) = \frac{n\varphi^2}{n+2} - \frac{n^2\varphi^2}{(n+1)^2} = \frac{n\varphi^2(n+1)^2 - n^2\varphi^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n\varphi^2(n^2+2n+1) - n^2\varphi^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\cancel{n^3\varphi^2} + \cancel{2n^2\varphi^2} + n\varphi^2 - \cancel{n^3\varphi^2} - \cancel{2n^2\varphi^2}}{(n+2)(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n\varphi^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$Var = \frac{\cancel{(n+1)}^2}{n^2} \cdot \frac{n\varphi^2}{(n+2)\cancel{(n+1)}^2} = \frac{\varphi^2}{n(n+2)}$$

A

Zadanie 8. Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku w łańcuchu Markowa o trzech stanach (E_1, E_2, E_3) jest postaci:

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad q \in (0,1) \quad , \quad p = 1 - q \ .$$

Załóżmy, iż po nieograniczenie rosnącej liczbie kroków rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów zbiega do: $\Pr(E_1) = \frac{1}{7}$, $\Pr(E_2) = \frac{2}{7}$, $\Pr(E_3) = \frac{4}{7}$. Wobec tego q wynosi:

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{7}$

(D) to zależy od rozkładu początkowego na przestrzeni stanów

(E) założenie jest fałszywe, ponieważ rozkład po parzystej liczbie kroków zbiega do innej granicy niż rozkład po nieparzystej liczbie kroków.

TW. Rozważmy skończony łańcuch Markova $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, gdzie $X_n \in S = \{0, 1, 2, \dots, r\}$. Zakładamy, że łańcuch jest nieredukowalny i aperiodyczny. Wtedy:

1. Układ równań

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{j \in S} \pi_j = 1 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie.

2. Rozwiązanie powyższego układu jest rozkładem granicznym łańcucha Markova czyli:

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) \quad \forall\ i, j \in S$$

Łańcuch Markova w zadaniu jest nieredukowalny ponieważ można przejść z dowolnego stanu do innego dowolnego stanu. Jest aperiodyczny ponieważ można przejść np. ze stanu 1 do stanu 1 w jednym kroku.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7}q + \frac{2}{7}q & \frac{1}{7}p + \frac{4}{7}q & \frac{2}{7}p + \frac{4}{7}p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{7}q & \frac{1}{7}p + \frac{4}{7}q & \frac{6}{7}p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{7}q = \frac{1}{7}$$

$$q = \frac{1}{3}$$

B

Zadanie 9. Pobieramy próbkę $x_1,\dots,x_n$ niezależnych obserwacji z rozkładu Poissona o nieznanym parametrze λ. Szacujemy parametr $p_0 = e^{-\lambda}$ za pomocą estymatora $\hat{p}_0 = e^{-\bar{x}}$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią z próbki. Obciążenie $E(\hat{p}_0) - p_0$ estymatora jest:

(A) zerowe

(B) ujemne

(C) dodatnie

(D) dodatnie lub ujemne, w zależności od liczebności próbki n

(E) dodatnie lub ujemne, w zależności od wartości parametru λ

$X_1,\dots,X_n \sim P(\lambda)$

$\hat{p}_0 = e^{-\bar{X}}$

$$E(\hat{p}_0) = E(e^{-\bar{X}}) = E\left[e^{-\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)}\right] = \left[E\left(e^{-\frac{X}{n}}\right)\right]^n =$$

$$= \left[M_X\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right]^n = \left[\exp\left(\lambda\left(e^{-\frac{1}{n}}-1\right)\right)\right]^n = \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{1}{n}}-1\right)\right)$$

$$B(\hat{p}_0) = E(\hat{p}_0) - p_0 = \exp\left(n\lambda\left(e^{-\frac{1}{n}}-1\right)\right) - \exp(-\lambda) \overset{?}{>=<} 0 \quad / \ln$$

$$n\lambda\left(e^{-\frac{1}{n}}-1\right) + \lambda \overset{?}{>=<} 0 \quad / : \lambda$$

$$n\left(e^{-\frac{1}{n}}-1\right) + 1 \overset{?}{>=<} 0$$

$$f(n) = ne^{-\frac{1}{n}} - n + 1$$

$$f'(n) = ne^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n^2} + e^{-\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} - 1$$

$$f''(n) = \frac{1}{n^2}e^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n^2}e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^3}e^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^3}e^{-\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow f'(n) \text{ rośnie}$$

$$\lim_{n\to\infty} f'(n) = 0 \quad \text{czyli} \quad f'(n) < 0 \quad \text{stąd } f(n) \text{ maleje}$$

$$f(1) = 0{,}6321$$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{-\frac{1}{n}}-1\right)+1 = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} + 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}e^{-\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} + 1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -e^{-\frac{1}{n}} + 1 = 0$$

$f(n) > 0$ Obciążenie dodatnie C

Zadanie 10. Niech X ma funkcję gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} (1+a)x^a & \text{dla } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Testujemy H_0: $a = 1$ przeciwko H_1: $a = 2$. Jeśli dysponujemy pojedynczą obserwacją X, to test najmocniejszy o rozmiarze $\alpha = 0.1$ polega na odrzuceniu H_0 jeśli:

(A) $X > \sqrt[4]{0.9}$

(B) $X > \sqrt[2]{0.9}$

(C) $X > 0.9$

(D) $X < 0.1$

(E) $X < \sqrt[2]{0.1}$

$H_0 : a = 1 \qquad f_0(x) = 2x$

$H_1 : a = 2 \qquad f_1(x) = 3x^2$

Test ma być najmocniejszy więc można zastosować likelihood ratio test.

Odrzucamy H_0 gdy:

$$\lambda(x) = \frac{L(x; a_1)}{L(x; a_0)} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x > C$$

$X > C$

Obszar krytyczny:

$K = \{ x : x > c \}$

$P_0(K) = \alpha, \quad P_1(K) = 1 - \beta$

$P(X > c \mid H_0) = 0{,}1$

$$P(X > c \mid H_0) = \int_c^1 2x \, dx = x^2 \Big|_c^1 = 1 - c^2 = 0{,}1$$

$c = \sqrt{0{,}9}$

B