Zadanie 1.
Łączna wartość szkód z pewnego ubezpieczenia $W = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$ ma rozkład złożony Poissona z oczekiwaną liczbą szkód równą λ i rozkładem wartości pojedynczej szkody takim, że $\Pr(Y_1 \in \{0,1,2,3,...\}) = 1$. Niech:

- $W(n) = \max\{Y_1 - n,\ 0\} + \max\{Y_2 - n,\ 0\} + ... + \max\{Y_N - n,\ 0\}$

oznacza łączną wartość odszkodowań z tego ubezpieczenia przy założeniu, że ubezpieczyciel pokrywa jedynie nadwyżki każdej szkody ponad kwotę *n*, gdzie *n* jest liczbą naturalną.
Wiemy, że:

- $\Pr(Y_1 > 20) = \dfrac{3}{10}$,
- $\mathrm{E}[W(20)] = 60$,
- $\mathrm{var}[W(20)] = 1400$,
- $\lambda = 10$.

Wobec tego $\mathrm{var}[W(21)]$ wynosi:

(A) 1277

(B) 1280

(C) 1283

(D) 1337

(E) 1343

Zadanie 2.
Rozważa się niekiedy następującą formułę składki $\Pi(X)$ za ryzyko *X*:

- $\Pi_{\varepsilon}(X) = x_{\varepsilon} + E\{[X - x_{\varepsilon}]_{+}\}$,

gdzie x_{ε} to kwantyl rzędu $(1-\varepsilon)$, czyli taka wartość *x*, dla której $\Pr(X > x) = \varepsilon$, zaś $\varepsilon \in (0, 1)$ jest parametrem formuły.
Rolę formuły składki (z parametrem $\eta \in (0, 1)$) może też spełniać sam kwantyl x_{η}.

Dla zadanego rozkładu ciągłego zmiennej losowej *X* można znaleźć postać funkcji $g : (0, 1) \to (0, 1)$ przypisującej wartości parametru ε wartość parametru $\eta = g(\varepsilon)$ taką, że obie formuły zwracają tę samą składkę, a więc iż zachodzi:

- $x_{\eta} = x_{\varepsilon} + E\{[X - x_{\varepsilon}]_{+}\}$

Jeśli zmienna losowa *X* ma rozkład Pareto o dystrybuancie postaci:

- $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{v}{v+x}\right)^{\alpha}$,

gdzie parametry dystrybuanty spełniają warunki:

- $v > 0$ oraz $\alpha > 1$,

to funkcja g jest postaci:

(A) $g(\varepsilon) = \varepsilon\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\alpha - 1}\right)^{\alpha-1}$

(B) $g(\varepsilon) = \varepsilon\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\alpha - 1}\right)^{\alpha}$

(C) $g(\varepsilon) = \varepsilon\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\alpha - 1 + \varepsilon}\right)^{\alpha}$

(D) $g(\varepsilon) = \varepsilon\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\alpha - 1 + \varepsilon}\right)^{\alpha+\varepsilon}$

(E) $g(\varepsilon) = \varepsilon\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\alpha - 1}\right)^{\alpha-1+\varepsilon}$

Zadanie 3.
Liczba szkód N w ciągu roku z pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą λ.
Wartości kolejnych szkód $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ są i.i.d., niezależne od zmiennej N. Rozkład wartości pojedynczej szkody określony jest na przedziale $(0, 1]$ i ma wartość oczekiwaną równą μ oraz dodatnią wariancję równą σ^2.

Ubezpieczyciel wystawia na to ryzyko polisę z sumą ubezpieczenia 1, z pokryciem każdej kolejnej szkody proporcjonalnym do „nieskonsumowanej do tej pory” części sumy ubezpieczenia, a więc:

- za (ewentualną) szkodę Y_1 wypłaca odszkodowanie w pełnej wysokości Y_1
- za (ewentualną) szkodę Y_2 wypłaca odszkodowanie w wysokości $(1 - Y_1) \cdot Y_2$
- za (ewentualną) szkodę Y_3 wypłaca odszkodowanie w wysokości $[1 - Y_1 - (1 - Y_1) \cdot Y_2] \cdot Y_3$, co równe jest $(1 - Y_1) \cdot (1 - Y_2) \cdot Y_3$
- za (ewentualną) szkodę Y_4 wypłaca odszkodowanie w wysokości $[1 - Y_1 - (1 - Y_1)Y_2 - (1 - Y_1)(1 - Y_2)Y_3] \cdot Y_4$, to znaczy $(1 - Y_1)(1 - Y_2)(1 - Y_3) \cdot Y_4$, itd.

Niech X oznacza sumę wypłat z tej polisy.
Wariancja sumy wypłat $\mathrm{var}(X)$ dana jest wzorem:

(A) $\exp(-2\lambda\mu)\left\{\exp\left(\lambda\sigma^2 + \lambda\mu^2\right) - 1\right\}$

(B) $\exp(-\lambda)\exp\left(\lambda\sigma^2 + \lambda\mu^2\right) - \exp(-2\lambda\mu)$

(C) $\exp(-2\lambda\mu)\exp\left(\lambda\sigma^2 + \lambda\mu^2\right) - \left\{1 - \exp(-\lambda\mu)\right\}^2$

(D) $\exp(-\lambda)\exp\left(\lambda\sigma^2 + \lambda\mu^2\right) - \left\{1 - \exp(-\lambda\mu)\right\}^2$

(E) $\exp(-2\lambda\mu)\exp\left(\lambda\sigma^2 + \lambda\mu^2\right)$

Wskazówka: zauważ że $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(1 - X)$

Zadanie 4.
Proces U_n z kapitałem początkowym $U_0 = u$ zadany jest wzorem rekurencyjnym:

- $U_n = (U_{n-1} + c)(1+i) - W_n, \qquad n = 1,2,3,...$

gdzie i to stopa przychodów z inwestycji bieżącej nadwyżki, c to składka roczna płatna z góry, zaś W_n to łączna wartość szkód w roku n płatna na koniec roku. Zakładamy, że $W_1, W_2, W_3,...$ to niezależne zmienne losowe o identycznym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną i wariancją równą odpowiednio μ, σ^2. Niech:

- $B_n = v^n U_n$

oznacza zdyskontowaną (przy użyciu rocznej stopy dyskonta $v = (1+i)^{-1}$) na moment początkowy wartość nadwyżki po n latach, zaś:

- $B_\infty = \lim_{n \to \infty} B_n$

Ustalamy składkę c w taki sposób, aby zapewnić iż $\Pr(B_\infty > u) = 0.95$. Dla $i = 4\%$ prowadzi to do formuły składki o postaci:

- $c = \frac{1}{1.04}\mu + const \cdot \sigma$,

Gdzie stała *const* z dokładnością do jednej tysięcznej wynosi:

(A) $const \approx 0.323$

(B) $const \approx 0.329$

(C) $const \approx 0.316$

(D) $const \approx 0.335$

(E) $const \approx 0.310$

Uwaga: kwantyl rzędu 0.95 standaryzowanej zmiennej normalnej wynosi ok. 1.645

Zadanie 5.

Niech $S_n = N_1 + N_2 + ... + N_n$ oznacza sumę n niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie ujemnym dwumianowym:

- $\Pr(N_1 = k) = \binom{r+k-1}{k}(1-q)^r q^k, \quad k = 0,1,2,...$

o znanej wartości parametru $r > 1$ oraz nieznanej wartości parametru $q \in (0,1)$.
Wiadomo, że estymator największej wiarogodności parametru q jest postaci:

- $q_{MNW} = \dfrac{S_n}{r \cdot n + S_n}$

Który z poniższych estymatorów (sam estymator MNW, czy też jedna z jego czterech modyfikacji) jest estymatorem nieobciążonym?
(Uwaga: zakładamy, że $r > 1$)

(A) $\dfrac{S_n}{r \cdot n + S_n}$

(B) $\dfrac{S_n}{r \cdot n + S_n - 1}$

(C) $\dfrac{S_n + 1}{r \cdot n + S_n}$

(D) $\dfrac{S_n}{r \cdot n + S_n - n}$

(E) $\dfrac{S_n + n}{r \cdot n + S_n}$

Zadanie 6.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona z zerową nadwyżką początkową, z dodatnią wartością oczekiwaną przyrostów procesu, oraz z rozkładem wartości pojedynczej szkody danym gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{poza tym} \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) wynosi:

(A) 1/3

(B) 3/8

(C) 5/12

(D) 7/16

(E) 4/9

Zadanie 7.
Szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ.
Niech:

- $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ oznaczają momenty pojawienia się szkód, zaś:
- $T_1 + D_1, T_2 + D_2, ..., T_n + D_n, ...$ momenty ich likwidacji.

Zakładamy, że zmienne losowe $D_1, T_1, D_2, (T_2 - T_1), D_3, (T_3 - T_2), ...$ są niezależne, przy czym zmienne losowe $D_1, D_2, ..., D_n, ...$ mają identyczny rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f_D(t) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta t) & gdy \quad t > 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo, że moment likwidacji $(n+1)$-szej szkody poprzedzi moment likwidacji n-tej szkody (dla pewnego ustalonego n), tzn.:

$$\Pr(T_{n+1} + D_{n+1} < T_n + D_n),$$

wynosi:

(A) $\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\beta + \lambda}$

(B) $\left(\frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^2$

(C) $\frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta + \lambda}$

(D) $\left(\frac{\beta}{\beta + \lambda} \right)^2$

(E) $\frac{\lambda \beta}{(\beta + \lambda)^2}$

Zadanie 8.

Przyjmijmy, że $N(n), Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym:

- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają identyczny rozkład określony na półosi dodatniej taki, że: $\forall x > 0 \quad \Pr(Y_1 \le x) < 1$
- $N(n)$ ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą pewnej liczbie naturalnej n

Niech $M_{N(n)}$ oznacza maksimum spośród $N(n)$ pierwszych wyrazów, a dokładniej:

- $M_{N(n)} = \begin{cases} 0 & gdy \quad N(n) = 0 \\ \max(Y_1, Y_2, \ldots Y_N) & gdy \quad N(n) > 0 \end{cases}$

Przyjmijmy też oznaczenie M_n dla maksimum z n pierwszych wyrazów ciągu $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$, a więc:

- $M_n = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

Wybierz zdanie, które poprawnie charakteryzuje relację rozkładów zmiennych losowych M_n oraz $M_{N(n)}$.

(A) $\underset{\substack{x>0 \\ n\in\{1,2,3,\ldots\}}}{\forall} \Pr(M_{N(n)} < x) > \Pr(M_n < x)$

(B) $\underset{\substack{x>0 \\ n\in\{1,2,3,\ldots\}}}{\forall} \Pr(M_{N(n)} < x) < \Pr(M_n < x)$

(C) Istnieją zarówno takie liczby naturalne n, że $\underset{x>0}{\forall} \Pr(M_{N(n)} < x) \le \Pr(M_n < x)$, jak i takie, że $\underset{x>0}{\forall} \Pr(M_{N(n)} < x) \ge \Pr(M_n < x)$

(D) Dla każdej liczby naturalnej n istnieje takie $x_0 > 0$, że $\underset{x\in(0,\, x_0)}{\forall} \Pr(M_{N(n)} < x) > \Pr(M_n < x)$, oraz $\underset{x>x_0}{\forall} \Pr(M_{N(n)} < x) < \Pr(M_n < x)$

(E) Dla każdej liczby naturalnej n istnieje takie $x_0 > 0$, że $\underset{x\in(0,\, x_0)}{\forall} \Pr(M_{N(n)} < x) < \Pr(M_n < x)$, oraz $\underset{x>x_0}{\forall} \Pr(M_{N(n)} < x) > \Pr(M_n < x)$

Zadanie 9.
Niech (T, D) oznaczają czas kalendarzowy zajścia szkody oraz czas likwidacji szkody (okres czasu, jaki upływa od zajścia szkody do jej likwidacji).

Przyjmijmy że:

- intensywność procesu pojawiania się szkód rosła od niepamiętnych czasów do momentu $t = 0$ wykładniczo (z wykładnikiem $\delta > 0$), co oznacza że czas zajścia losowo wybranej szkody zaszłej przed czasem $t = 0$ ma rozkład o gęstości:
$$f_T(t) = \begin{cases} \delta \exp(\delta t) & gdy \quad t < 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases},$$
- rozkład czasu likwidacji szkody dany jest gęstością:
$$f_D(t) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta t) & gdy \quad t > 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$$
- (T, D) są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Oczekiwana wartość czasu likwidacji dla tych szkód, które w momencie czasu $t = 0$ mają status szkód zaszłych, ale jeszcze nie zlikwidowanych, a więc:

- $E(D | T + D > 0)$,

Wynosi:

(A) $\frac{1}{\beta}$

(B) $\frac{2}{\beta}$

(C) $\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\beta\delta}{(\beta + \delta)^2}\right)$

(D) $\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\beta}{\beta + \delta}\right)$

(E) $\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\delta}{\beta + \delta}\right)$

Zadanie 10.
W kolejnych latach $t = 1, 2, 3, 4$ ubezpieczony charakteryzujący się parametrem ryzyka Λ generuje N_t szkód. Dla danego $\Lambda = \lambda$ zmienne N_1, N_2, N_3, N_4 są warunkowo niezależne i mają identyczny rozkład Poissona:

- $\Pr\left(N_t = k \middle| \Lambda = \lambda\right) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $\qquad t = 1, 2, 3, 4, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Parametr Λ w populacji ubezpieczonych ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą $\frac{1}{4}$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że:

- w ciągu liczb $\left(N_1, N_2, N_3, N_4\right)$ wystąpiły trzy zera i jedna liczba dodatnia.

Warunkowa wartość oczekiwana $\mathrm{E}\left(\Lambda \middle| \mathrm{A}\right)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{19}{90}$

(C) $\frac{13}{42}$

(D) $\frac{17}{72}$

(E) $\frac{15}{56}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 października 2007 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	C	
3	A	
4	E	
5	B	
6	B	
7	A	
8	A	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.