Zadanie 1.
Proces szkód w pewnym ubezpieczeniu jest złożonym procesem Poissona, z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą λ i rozkładem wartości szkody o dystrybuancie F_Y.

Ubezpieczony realizuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:

- nie zgłasza szkód, dopóki wartość którejś z nich nie przekroczy kwoty x_0,
- jeśli wartość którejś szkody przekroczy kwotę x_0, to jest ona zgłaszana, a następne ewentualne szkody w tym samym roku są zgłaszane już bez względu na ich wartość.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- F - skrótowe oznaczenie dla $F_Y(x_0)$
- N – liczba szkód zaszłych w ciągu roku
- M – liczba szkód zgłoszonych
- K – liczba szkód nie zgłoszonych

Oczywiście zachodzi $N = M + K$.
Oczekiwana liczba szkód nie zgłoszonych $\mathrm{E}(K)$ wyraża się wzorem:

(A) λF

(B) $\lambda - \frac{F}{1-F}\left(\exp(\lambda(1-F)) - 1\right)$

(C) $\lambda - \frac{F}{1-F}\left(1 - \exp(-\lambda(1-F))\right)$

(D) $\frac{F}{1-F}\left(\exp(\lambda(1-F)) - 1\right)$

(E) $\frac{F}{1-F}\left(1 - \exp(-\lambda(1-F))\right)$

Wskazówka: wykorzystaj wzór $\mathrm{E}(K) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(K|N)\right)$

Zadanie 2.
Nadwyżka ubezpieczyciela w wyniku rocznej działalności wynosi:

- $U_1 = (c+u)(1+i) - W$,

gdzie:

- W - oznacza łączną wartość szkód wypłacanych na koniec roku
- c - to zagregowana składka za portfel ryzyk W, pobierana na początku roku
- u - to kapitał początkowy, zabezpieczający ryzyko portfela W
- i - to stopa zwrotu z bezryzykownych papierów wartościowych, w które zainwestowany jest przez okres roku kapitał zabezpieczający u i składka c

Załóżmy, że W ma rozkład ciągły, dany dystrybuantą F_W .

Ubezpieczyciel podejmuje decyzję łączną o wysokości potrzebnego kapitału początkowego u oraz składki c, kierując się następującymi przesłankami:

- $\mathrm{E}(U_1) = (1+r)u$
- $\Pr\left(U_1 < \frac{1}{2}u\right) = \varepsilon$

gdzie:

- $r > i$, tzn. oczekiwana stopa zwrotu jest większa od stopy zwrotu bez ryzyka,
- prawdopodobieństwo ε utraty połowy wyłożonego kapitału u jest małe.

W rezultacie składka c dana jest następującym wzorem:

(A) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{r-i}{\frac{1}{2}+r}\left(F_W^{-1}(1-\varepsilon) - \mathrm{E}(W)\right)\right)$$

(B) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{\frac{1}{2}+r-i}{1+r}\left(F_W^{-1}(1-\varepsilon) - \mathrm{E}(W)\right)\right)$$

(C) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{r-i}{\frac{1}{2}+r}F_W^{-1}(1-\varepsilon)\right)$$

(D) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{\frac{1}{2}+r-i}{1+r}F_W^{-1}(1-\varepsilon)\right)$$

(E) $$c = \frac{1}{1+i}\left(\mathrm{E}(W) + \frac{r-i}{1+r}\left(F_W^{-1}(1-\varepsilon) - \mathrm{E}(W)\right)\right)$$

Zadanie 3.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W każdym z portfeli pojedyncze ryzyko generuje szkody z godnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- 1 portfel:

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{2}$;

- 2 portfel:

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $(1+\theta)\frac{\lambda}{5}$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:

$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right)$,

to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \ \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

(A) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{2}{21}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{3}, \ \frac{1}{21}\right)$

(D) $\left(\frac{2}{3}, \ \frac{2}{21}\right)$

(E) $\left(\frac{2}{3}, \ \frac{1}{7}\right)$

Zadanie 4.

Proces nadwyżki jest złożonym procesem Poissona, w którym θ to stosunkowy narzut bezpieczeństwa na składkę netto, zaś Y to zmienna losowa wyrażająca wartość pojedynczej szkody. Niech L_1 będzie wartością, o którą nadwyżka spada po raz pierwszy poniżej poziomu wyjściowego (o ile do takiego spadku dochodzi), zaś L niech oznacza maksymalną całkowitą stratę (nadwyżka początkowa minus najniższy punkt trajektorii procesu).

Jeśli Y ma rozkład jednostajny na przedziale (0, 10), to warunkowa wartość oczekiwana $E(L|L > 0)$ zmiennej L pod warunkiem, że dojdzie w którymś momencie czasu do spadku nadwyżki poniżej poziomu wyjściowego jest dla $\theta > 0$ skończona i wyraża się następującym wzorem:

(A) $5\frac{1+\theta}{3\theta}$

(B) $10\frac{1+\theta}{3\theta}$

(C) $5\frac{1+\theta}{\theta}$

(D) $20\frac{1+\theta}{3\theta}$

(E) $25\frac{1+\theta}{3\theta}$

Zadanie 5.

W pewnym ubezpieczeniu liczba szkód N_T, które w ciągu T lat wygeneruje ubezpieczony charakteryzujący się wartością q parametru ryzyka Q ma rozkład:

- $\Pr\left(N_T = k \middle| Q = q\right) = \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k}$, dla $k \in (0, 1, ..., T)$

Rozkład wartości parametru ryzyka Q w populacji ubezpieczonych dany jest na odcinku $(0, 1)$ gęstością:

- $f_Q(q) = 72q(1-q)^7$

Warunkowa wartość oczekiwana $\mathrm{E}\left(Q \middle| N_2 > 0\right)$ parametru ryzyka Q charakteryzującego ubezpieczonego, którego wybraliśmy losowo z tej populacji, pod warunkiem że w ciągu dwóch lat wygenerował co najmniej jedną szkodę, wynosi:

(A) $\frac{5}{19}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{5}{22}$

(D) $\frac{5}{24}$

(E) $\frac{1}{5}$

Zadanie 6.
Szkoda Y może przyjmować wartości ze skończonego zbioru liczb $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ takich, że $\min\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \geq 3$. Łączna wartość szkód w portfelu W równa się:

$$W = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i ,$$

gdzie N_i to liczba szkód o wartości y_i.

Załóżmy, że $N_1, \ldots, N_n$ to nawzajem niezależne zmienne losowe o rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi odpowiednio $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wiemy, że:

- $E(W) = 600$,
- $VAR(W) = 6000$,
- $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 100$.

Jeżeli do każdej szkody zastosujemy udział własny ubezpieczonego w wysokości $d = 2$, to wariancja łącznej wartości szkód pozostałej na udziale ubezpieczyciela wyniesie:

(A) 4000

(B) 3600

(C) 3200

(D) 2800

(E) 2400

Zadanie 7.
Załóżmy, że momenty pojawiania się szkód $T_1 < T_2 < ... < T_n < ...$ tworzą proces Poissona na przedziale $(0,\infty)$, o intensywności λ. Innymi słowy,

$$T_1,\ T_2 - T_1,\ T_3 - T_2,\ T_4 - T_3,...$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej $1/\lambda$. Przyjmujemy, że każda szkoda, niezależnie od pozostałych, jest likwidowana po upływie pewnego losowego okresu czasu. Mówiąc dokładniej, momenty likwidacji są zmiennymi losowymi postaci:

$$\widetilde{T}_1 = T_1 + D_1,\ \widetilde{T}_2 = T_2 + D_2\ ,...,\ \widetilde{T}_n = T_n + D_n,...$$

przy czym „czasy opóźnienia'' D_i są niezależne nawzajem oraz od $T_1, T_2, T_3,...$ i mają jednakową dystrybuantę F.

Niech $\widetilde{N}(t)$ oznacza liczbę punktów $\widetilde{T}_i$ w przedziale $(0,t]$, a więc liczbę szkód zaszłych i zlikwidowanych.

Wartość oczekiwana $E\left(\widetilde{N}(t)\right)$ tej liczby dana jest wzorem:

(A) $\lambda t\left(1 - F(t)\right)$

(B) $\lambda \int_0^t F(x)dx$

(C) $\lambda \int_0^t [1 - F(x)]dx$

(D) $\lambda \int_t^\infty [1 - F(x)]dx$

(E) $\lambda t F(t)$

Wskazówka: $E\left[\widetilde{N}(t)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\left(\widetilde{T}_i \le t\right)$

Zadanie 8.
Ubezpieczyciel pokrywa ryzyka, za które za okres roku pobiera składkę P, i które w tym okresie generują łączną wartość szkód:

$$W = Y_1 + \ldots + Y_N ,$$

- o złożonym rozkładzie Poissona, gdzie rozkład wartości pojedynczej szkody Y na udziale ubezpieczyciela dany jest dystrybuantą F taką, że $F(0) = 0$.

Nadzór wymaga, aby ubezpieczyciel ograniczał odpowiedzialność za pojedynczą szkodę do wysokości M, a więc aby:

- $\min\{m : \ F(m) = 1\} \leq M$,

oraz ustala, że limit odpowiedzialności M nie może przekroczyć zadanej części rocznej składki, a więc że musi zachodzić:

- $M \leq c \cdot P$,

gdzie c jest zadanym przez nadzór parametrem kontrolnym o wartości dodatniej.

Jeśli przyjąć za pewnik, że ubezpieczyciel pobiera składkę nie mniejszą niż oczekiwana wartość odszkodowań, a więc iż:

- $P \geq \mathrm{E}(W)$

to dobierając odpowiednio wartość parametru kontrolnego c nadzór może być pewien, że zachodzić będzie nierówność:

- $\dfrac{\sqrt{VAR(W)}}{P} \leq \dfrac{1}{10}$

Znajdź największą wartość c^* parametru kontrolnego c, która (przy przyjętych założeniach) gwarantuje zachodzenie powyższej nierówności.

(A) $c^* = \dfrac{1}{100\sqrt{10}}$

(B) $c^* = \dfrac{1}{100}$

(C) $c^* = \dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

(D) $c^* = \dfrac{1}{10}$

(E) $c^* = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Zadanie 9.
Mamy trzy zmienne losowe dotyczące szkody, do której doszło w ciągu danego roku:

- T - czas zajścia szkody w ciągu tego roku kalendarzowego, o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$,
- D - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji, o rozkładzie danym na odcinku $(0, 2)$ gęstością:
$$f_T(t) = 1 - 0.5t\,,$$
- Y – wartość szkody.

Jednostką pomiaru czasu (tak dla zmiennej T, jak i dla zmiennej D) jest 1 rok.

- Zmienne T oraz D są nawzajem niezależne.
- Wartość szkody nie zależy od tego, kiedy do niej dojdzie, natomiast występuje tendencja do szybkiej likwidacji małych szkód i dłużej trwającej likwidacji dużych szkód, co wyraża następujące założenie:
$$\mathrm{E}(Y|D,T) = \mathrm{E}(Y|D) = 10 + 2D$$

Warunkowa oczekiwana wartość szkody pod warunkiem, że szkoda ta została zlikwidowana w roku zajścia, a więc:
$$E(Y|T + D \le 1)$$
wynosi:

(A) 10.2

(B) 10.4

(C) 10.6

(D) 10.8

(E) 11.0

Zadanie 10.
Liczba szkód *N* ma rozkład o niezerowych prawdopodobieństwach na zbiorze liczb naturalnych z zerem, spełniających zależność rekurencyjną:

$$\frac{\Pr(N=k)}{\Pr(N=k-1)} = \frac{1}{5}\cdot\left(1+\frac{2}{k}\right), \qquad k = 1,2,3,...$$

Oczekiwana liczba szkód $E(N)$ wynosi:

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{5}{6}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 grudnia 2005 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	C	
4	B	
5	A	
6	A	
7	B	
8	B	
9	C	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.