Zadanie 1. Likwidacja szkody zaistniałej w roku t następuje:

- w tym samym roku z prawdopodobieństwem $\frac{3}{10}$,
- w następnym roku z prawdopodobieństwem $\frac{3}{10}$,
- w roku $t+k$ (dla $k>1$) z prawdopodobieństwem $\frac{8}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$;

bez względu na to, jaki był moment kalendarzowy zajścia tej szkody, i jakie momenty kalendarzowe i czasy likwidacji miały inne szkody.
Niech:

- R_t oznacza liczbę szkód nie zlikwidowanych na koniec roku t (spośród tych, które zaszły w roku t oraz latach poprzednich)
- n_t oznacza liczbę szkód zaszłych w ciągu roku t.

Przy założeniu, że:

- $R_{t-1} = 1100$
- $n_t = 900$
- $n_{t-1} = 800$

wartość oczekiwana R_t (warunkowa, przy wyżej wymienionych warunkach) wynosi:

(A) 1220

(B) 1120

(C) 1195

(D) 1145

(E) 1170

Wskazówka: Znajdź postać zależności rekurencyjnej: $R_t = f(R_{t-1}, n_t, n_{t-1})$

Zadanie 2. Ubezpieczyciel jest monopolistą na rynku ubezpieczeń od pewnego ryzyka. Może więc ustalić wysokość składki za to ryzyko na takim poziomie, aby zmaksymalizować oczekiwany zysk. Jedynym jego problemem jest to, że odsetek podmiotów (z populacji podmiotów narażonych na to ryzyko) które zdecydują się wykupić ubezpieczenie, jest malejącą funkcją wysokości składki.
Załóżmy, że:

- Każdy podmiot narażony na to ryzyko charakteryzuje się pewną wartością Λ parametru ryzyka, liczba szkód z tego ryzyka ma rozkład Poissona (Λ), a każda szkoda ma wartość jeden;

W rezultacie oczekiwany zysk Z na podmiocie o wartości parametru ryzyka równej Λ wyniesie:

$$\mathrm{E}\left(Z(\Pi)\middle|\Lambda\right)=\begin{cases}\Pi-\Lambda & \textit{gdy podmiot wykupi ubezpieczenie}\\ 0 & \textit{w p. p.}\end{cases}$$

gdzie Π to wysokość składki.

- Wartość parametru Λ jest znana podmiotowi narażonemu na to ryzyko. Podejmując decyzję czy nabyć ubezpieczenie czy go nie nabywać, podmiot kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy funkcji użyteczności postaci $u(x)=-\exp(-ax)$
- Ubezpieczyciel nie zna wartości parametru Λ charakteryzujących konkretne podmioty, oferuje więc ubezpieczenie wszystkim po tej samej składce Π. Ubezpieczyciel wie jednak, że w populacji ubezpieczonych wartość parametru Λ ma rozkład wykładniczy o gęstości $f_\Lambda(x)=\beta\exp(-\beta x)$.

Znajdź taką wartość Π_* składki Π, która maksymalizuje oczekiwany zysk w przeliczeniu na jeden podmiot z populacji, a więc $\mathrm{E}\left(Z(\Pi)\right)$.

(A) $\Pi_*=\dfrac{\exp(a)-1}{a\beta}$

(B) $\Pi_*=\dfrac{\left(\exp(a)-1\right)^2}{a\beta\left(\exp(a)-1-a\right)}$

(C) $\Pi_*=\dfrac{\exp(a)-1}{\beta\left(\exp(a)-1-a\right)}$

(D) $\Pi_*=\dfrac{\exp(a)-1-a}{a\beta}$

(E) $\Pi_*=\dfrac{\exp(a)-1-a}{\beta\left(\exp(a)-1\right)}$

Zadanie 3. Niech Y oznacza wartość szkody, zaś T czas, jaki upływa od momentu jej zajścia do momentu jej likwidacji. Łączny rozkład zmiennej losowej (T, Y) ma gęstość daną wzorem:

$$f_{T,Y}(t, y) = \begin{cases} \beta \dfrac{1}{y} \exp(-\beta y) & \text{dla} \quad t \in (0, y),\ y \in (0, \infty) \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

z parametrem β o wartości dodatniej.

Iloraz bezwarunkowych wartości oczekiwanych $\dfrac{\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{E}(T)}$ wynosi:

(A) $\dfrac{2\beta}{\exp(\beta) - 1}$

(B) $2\dfrac{\exp(\beta) - 1}{\beta}$

(C) $4\dfrac{\exp(\beta) - 1 - \beta}{\beta^2}$

(D) $\dfrac{\beta^2}{\exp(\beta) - 1 - \beta}$

(E) 2

Zadanie 4. Rozważamy klasyczny proces nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- pojedyncze wypłaty Y_i są i.i.d., niezależne od procesu $N(t)$.

Załóżmy, że rozkład wartości pojedynczej wypłaty dany jest na półosi dodatniej dystrybuantą:

- $F_Y(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^2$,

że składka c zawiera stosunkowy narzut bezpieczeństwa 33%, a więc:

- $c = 133\%\lambda \mathrm{E}(Y)$,

oraz że nadwyżka początkowa u wynosi:

- $u = 100$.

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$ można wyznaczyć w oparciu o aproksymację, która czyni użytek z następującej własności rozkładu Pareto:

- Jeśli $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ są zmiennymi losowymi i.i.d. o rozkładzie Pareto, to dla każdego ustalonego n zachodzi:
$$\frac{\Pr(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n > x)}{\Pr(X_1 > x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} n .$$

Prawdopodobieństwo ruiny (przy założeniu, że przyjęta wartość $u = 100$ jest w powyższym sensie „duża”) z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 1.4%

(B) 1.9%

(C) 2.4%

(D) 3.0%

(E) 3.6%

Wskazówki:
Wykorzystaj następujące fakty:

- $\Psi(u) = 1 - F_L(u)$, gdzie F_L jest dystrybuantą zmiennej losowej L interpretowanej jako maksymalna strata;
- $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_N$ ma złożony rozkład geometryczny ze składnikiem l_i interpretowanym jako głębokość deficytu w momencie ruiny, o ile proces startuje z zerowej nadwyżki początkowej;

Zadanie 5. Załóżmy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na przedziale [0; 1], zaś N jest zmienną losową o rozkładzie ujemnym dwumianowym:

$$P(N = n) = \binom{n+2}{n} p^3 (1-p)^n \text{ dla } n = 0,1,2,\ldots,$$

niezależną od zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. Niech

$$M_N = \begin{cases} \max(X_1, X_2, \ldots, X_N) & \text{gdy } N > 0 \\ 0 & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $E(M_N)$.

(A) $\frac{1}{2}(2 - 2p - p^2)$

(B) $\frac{1}{2}(1-p)(2-p)$

(C) $(1-p)(2-p)$

(D) $(1-p)(2+p)$

(E) $\frac{1}{2}(1-p)(2+p)$

Zadanie 6. Łączna wartość szkód W ma złożony rozkład Poissona z parametrem częstotliwości λ i wartością pojedynczej szkody o rozkładzie logarytmiczno-normalnym. Wiadomo, że:

- $\lambda = 100$
- Współczynnik zmienności (odchylenie standardowe podzielone przez wartość oczekiwaną) zmiennej W wynosi $V_W = \frac{1}{10}$

Wobec tego współczynnik skośności γ_W zmiennej losowej W wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$

(E) za mało danych aby udzielić odpowiedzi liczbowej

Zadanie 7. Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$

gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych. Wiemy, że składka za rok wynosi $c = 11$, oraz że charakterystyki rozkładu przyrostu zagregowanej wartości szkód za okres roku W_n wynoszą:

- wartość oczekiwana $\mu_W = 10$
- wariancja $\sigma_W^2 = 4$
- skośność $\gamma_W = \frac{1}{2}$

Aproksymujemy funkcję prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u)$ na dwa sposoby:

- $\Psi_{diff}(u)$ to aproksymacja oparta na założeniu, iż dla dowolnego $h > 0$ przyrosty procesu nadwyżki ubezpieczyciela za okres o długości *h* mają rozkład normalny o parametrach $(\mu_W h, \sigma_W^2 h)$ (ignorujemy skośność)
- $\Psi_{dV}(u)$ to aproksymacja de Vyldera, a więc oparta na założeniu, że proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona, zaś wartości poszczególnych szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie wykładniczym, przy czym parametry procesu aproksymującego są tak dobrane, aby zachować dryf $c - \mu_W$ oraz wariancję σ_W^2 i skośność γ_W

Wyznacz taką wartość u_* nadwyżki początkowej *u*, dla której zachodzi:

$$\Psi_{diff}(u) = \Psi_{dV}(u)$$

a więc dla której obie aproksymacje dają to samo prawdopodobieństwo ruiny.

(A) $u_* \approx 2.16$

(B) $u_* \approx 2.21$

(C) $u_* \approx 2.26$

(D) $u_* \approx 2.30$

(E) $u_* \approx 2.33$

Zadanie 8. Niech Y będzie zmienną losową o rozkładzie danym dystrybuantą F_Y należącym do klasy K_μ wszystkich rozkładów spełniających następujące warunki:

- $\Pr(0 \le Y \le 1) = 1$, oraz $E(Y) = \mu$,

dla pewnej ustalonej liczby μ z przedziału $(0, 1)$.

Niech M oraz m oznaczają zmienne losowe o dwóch szczególnych rozkładach należących do tej klasy:
$\Pr(M = 1) = \mu$, $\Pr(M = 0) = 1 - \mu$, oraz:
$\Pr(m = \mu) = 1$.

Które z trzech poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe?

(I) jeśli $F_Y \in K_\mu$, to zachodzi $Var(m) \le Var(Y) \le Var(M)$

(II) jeśli $F_Y \in K_\mu$, to $\forall x \in [0, 1]$ zachodzi $\Pr(m > x) \le \Pr(Y > x) \le \Pr(M > x)$

(III) jeśli $F_Y \in K_\mu$, to $\forall x \in [0, 1]$ zachodzi $E[(m - x)_+] \le E[(Y - x)_+] \le E[(M - x)_+]$

(A) Prawdziwe jest (I), fałszywe (II) i (III)

(B) Wszystkie (I) (II) i (III) są prawdziwe

(C) Prawdziwe są (I) i (III), fałszywe (II)

(D) Prawdziwe są (I) i (II), fałszywe (III)

(E) Prawdziwe jest (III), fałszywe (I) i (II)

Zadanie 9. Rozkład warunkowy łącznej wartości szkód $X = Y_1 + ... + Y_N$ z pojedynczego ryzyka (pochodzącego z pewnej populacji ryzyk) przy danej wartości parametru ryzyka Λ jest złożonym rozkładem Poissona:

- o oczekiwanej liczbie szkód $\mathrm{E}(N|\Lambda) = \Lambda$;
- o wartości pojedynczej szkody *Y* takiej, że $\mathrm{E}(Y|\Lambda) = \Lambda$

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ryzyk rozkład Gamma o wartości oczekiwanej 2/7 i wariancji 2/49.

Przeprowadzamy dwuetapowe doświadczenie:

- losujemy ryzyko z ww. populacji
- obserwujemy liczbę szkód *N* oraz (o ile $N > 0$) ich wartości $Y_1,...,Y_N$.

Oczekiwana średnia wartość zaobserwowanych szkód (pod warunkiem, że pojawiła się co najmniej jedna szkoda):

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{N}\middle| N > 0\right)$$

wynosi z dobrym przybliżeniem:

(A) 0.250

(B) 0.285

(C) 0.335

(D) 0.402

(E) 0.512

Zadanie 10. W kolejnych latach $t = 1, 2, 3, \ldots$ ubezpieczony charakteryzujący się parametrem ryzyka Λ generuje N_t szkód. Dla danego $\Lambda = \lambda$ zmienne $N_1, N_2, N_3, \ldots$ są warunkowo niezależne i mają identyczny rozkład Poissona:

- $\Pr(N_t = k | \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\qquad t = 1, 2, 3, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Parametr Λ w populacji ubezpieczonych ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą $\dfrac{1}{5}$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że:

- w ciągu liczb $(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5)$ wystąpiły cztery zera i jedna liczba dodatnia.

Warunkowa wartość oczekiwana $E(\Lambda | A)$ wynosi:

(A) $\dfrac{1}{5}$

(B) $\dfrac{19}{90}$

(C) $\dfrac{2}{9}$

(D) $\dfrac{17}{72}$

(E) $\dfrac{1}{4}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 10 października 2005 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	B	
3	E	
4	D	
5	E	
6	C	
7	A	
8	C	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.