**Zadanie 1.**
Portfel składa się z 990 niezależnych, identycznych ryzyk. Dla każdego z nich ilość szkód ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.1, a wartość pojedynczej szkody ma zawsze (niezależnie od ilości i wartości ewentualnych innych szkód) rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej jeden.

Uznano, iż rozkład łącznej wartości szkód z portfela ma zbyt wysoki współczynnik skośności (stosunek trzeciego momentu centralnego do sześcianu odchylenia standardowego). Rozważa się odstąpienie reasekuratorowi nadwyżki każdej szkody z portfela ponad *d*, co w efekcie spowoduje zmniejszenie współczynnika skośności.

Wskaż taką wartość $d > 0$, dla której współczynnik skośności wyniesie 0.1

(A) 2

(B) 1

(C) 0.5

(D) 0.1

(E) takie $d > 0$ nie istnieje

**Zadanie 2.**
Zmienna losowa $X$ przyjmuje wartości nieujemne – tzn. $\Pr(X < 0) = 0$.
Dla dwóch punktów $d_1$ i $d_2$ takich, że $0 < d_1 < d_2$ znamy wartości dystrybuanty $F_X(d_i)$ oraz wartości oczekiwane nadwyżki zmiennej $X$ ponad odpowiednie $d_i$.
Nasze dane zawarte są w tabeli:

| $i$ | $d_i$ | $F_X(d_i)$ | $E((X - d_i)_+)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 0.25 | 10.0 |
| 2 | 10 | 0.50 | 8.6 |

Oblicz warunkową wartość oczekiwaną $E(X/X \in (8, 10])$.

(A) $E(X/X \in (8, 10]) = 8.4$

(B) $E(X/X \in (8, 10]) = 8.8$

(C) $E(X/X \in (8, 10]) = 9.2$

(D) $E(X/X \in (8, 10]) = 9.6$

(E) $E(X/X \in (8, 10]) = 10$

**Zadanie 3.**

W pewnym ubezpieczeniu może zajść co najwyżej jedna szkoda (z jednej polisy) w ciągu roku. Pojedynczy ubezpieczony generuje szkody w kolejnych latach niezależnie, ciągle z tym samym prawdopodobieństwem *q*. Dla losowo wybranego ubezpieczonego z populacji „jego *q*" jest realizacją zmiennej losowej *Q*.

Zmienna losowa *Q* ma rozkład beta dany na odcinku $(0, 1)$ gęstością:

$$f_Q(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}$$

z parametrami $\alpha = 2$, $\beta = 8$.

Niech *N* oznacza zmienną losową wyrażającą ilość szkód wygenerowaną przez (losowo wybranego z populacji) ubezpieczonego w ciągu trzech kolejnych lat ubezpieczenia.

Oblicz prawdopodobieństwo przyjęcia wartości środkowych: $\Pr(N=1)+\Pr(N=2)$.

(A) $\Pr(N=1)+\Pr(N=2) = \dfrac{24}{55}$

(B) $\Pr(N=1)+\Pr(N=2) = \dfrac{153}{5\cdot 5\cdot 11}$

(C) $\Pr(N=1)+\Pr(N=2) = \dfrac{48}{125}$

(D) $\Pr(N=1)+\Pr(N=2) = \dfrac{8}{55}$

(E) $\Pr(N=1)+\Pr(N=2) = \dfrac{16}{125}$

**Zadanie 4.**
Niech:

- $S = Y_1 + \ldots + Y_N$ ,
- $N = M_1 + \ldots + M_K$ ,

oraz wszystkie zmienne $Y_1, Y_2, \ldots,\quad M_1, M_2, \ldots$ oraz $K$ są nawzajem niezależne.

Zmienna $K$ ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.2.

Zmienne $M_1, M_2, \ldots$ mają identyczny rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.5
Zmienne $Y_1, Y_2, \ldots$ mają identyczny rozkład z wartością oczekiwaną $m_1$ i momentem zwykłym drugiego rzędu $m_2$.

Wariancja zmiennej $S$ wynosi:

(A) $VAR(S) = 0.1m_2 + 0.02m_1^2$

(B) $VAR(S) = 0.1m_2 + 0.03m_1^2$

(C) $VAR(S) = 0.1m_2 + 0.04m_1^2$

(D) $VAR(S) = 0.1m_2 + 0.05m_1^2$

(E) $VAR(S) = 0.1m_2 + 0.06m_1^2$

**Zadanie 5.**
Łączna wartość szkód w pewnym portfelu ryzyk: $S = Y_1 + \ldots + Y_N$,
ma złożony rozkład Poissona, gdzie $E(N) = 10$ i rozkład wartości pojedynczej szkody $Y$ jest taki, że:

- $E(Y^2) < \infty$,
- $E[(Y - 10)_+] = 10$

Niech teraz zmienna $S_R$ oznacza łączną wartość nadwyżek każdej ze szkód ponad wartość 10, pokrywaną przez reasekuratora:

- $S_R = (Y_1 - 10)_+ + \ldots + (Y_N - 10)_+$,

zaś zmienna $S_U = S - S_R$ oznacza pozostałą na udziale własnym ubezpieczyciela kwotę, a więc:

- $S_U = \min\{Y_1, 10\} + \ldots + \min\{Y_N, 10\}$.

Ile wynosi $COV(S_R, S_U)$?

(A) $COV(S_R, S_U) = 100$

(B) $COV(S_R, S_U) = 200$

(C) $COV(S_R, S_U) = 500$

(D) $COV(S_R, S_U) = 1000$

(E) brakuje danych do udzielenia odpowiedzi

**Zadanie 6.**
Łączna wartość szkód $X$ w pewnym ubezpieczeniu rocznym ma rozkład złożony:
$X = Y_1 + ... + Y_N \qquad (X = 0 \quad \text{gdy} \quad N = 0)$
gdzie ilość szkód $N$ ma pewien rozkład określony ma liczbach naturalnych z zerem.
Rozkład wartości pojedynczej szkody $Y$ jest rozkładem ciągłym.
Oznaczmy przez $F$ prawdopodobieństwo:
$F = \Pr(Y \le c)$
dla pewnej ustalonej liczby $c$. Załóżmy że $0 < F < 1$.

Niech $Z$ oznacza łączną wartość szkód zgłoszonych, przy następującej strategii zgłaszania szkód przez ubezpieczonego:

- ubezpieczony wstrzymuje się od zgłaszania szkód do momentu, do którego wartość pewnej szkody nie przekroczy liczby $c$;
- jeśli do takiej szkody dojdzie, ubezpieczony ją zgłasza, i zgłasza także wszystkie następne szkody (które ewentualnie przed końcem roku się zdarzą) bez względu na ich wysokość.

Zakładamy przy tym, że szkody pojawiają się sekwencyjnie (niemożliwe jest zajście dwóch szkód w tym samym momencie czasu), decyzje o zgłoszeniu lub niezgłoszeniu podejmowane są natychmiast, i mają charakter nieodwołalny.

**Przy ustalonej wartości *n*** takiej, że $n > 0$ oraz $\Pr(N = n) > 0$
$E(Z/N = n)$ dane jest wzorem (wybierz poprawną odpowiedź):

(A) $$E(Z/N = n) = E(Y/Y > c) \cdot (1 - F^n) + E(Y) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (1 - F^k)$$

(B) $$E(Z/N = n) = E(Y/Y > c) \cdot (1 - F^n) + E(Y) \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 - F^k)$$

(C) $$E(Z/N = n) = E(Y/Y > c) + E(Y) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (1 - F^k)$$

(D) $$E(Z/N = n) = E(Y/Y > c) + E(Y) \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 - F^k)$$

(E) $$E(Z/N = n) = E(Y) \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 - F^k)$$

**Zadanie 7.**
Zmienna losowa $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_N$
ma złożony rozkład geometryczny taki, że:
$\Pr(N = k) = (1 - q) \cdot q^k$, $\quad k = 0,1,2,\ldots$
zaś pojedynczy składnik $l_i$ sumy $L$ ma rozkład wykładniczy.
Rozkład warunkowy zmiennej losowej $L$ pod warunkiem, że $L > 0$ jest oczywiście rozkładem ciągłym określonym na półosi dodatniej. Oznaczmy jego dystrybuantę symbolem $F_{L/L>0}$.

$F_{L/L>0}$ jest dystrybuantą rozkładu:

(A) Gamma $(\alpha, \beta)$ o parametrze $\alpha < 1$ (tzn. o wariancji większej niż kwadrat wartości oczekiwanej)

(B) Gamma $(\alpha, \beta)$ o parametrze $\alpha > 1$ (tzn. o wariancji mniejszej niż kwadrat wartości oczekiwanej)

(C) wykładniczego

(D) innego niż wykładniczy, ale o wariancji równej kwadratowi wartości oczekiwanej

(E) innego niż Gamma, ale o wariancji większej niż kwadrat wartości oczekiwanej

**Zadanie 8.**
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o identycznym rozkładzie, gdzie:

- nadwyżka początkowa $u$ jest nieujemna,
- składka $c$ jest większa od wartości oczekiwanej przyrostu szkód $W_i$,
- moment centralny trzeciego rzędu przyrostu szkód $\mu_3(W_i)$ jest dodatni ale skończony.

Rozważmy funkcję:

- $\Psi_{dV}\left(u, \quad c, \quad E(W_i), \quad VAR(W_i), \quad \mu_3(W_i)\right)$

przypisującą procesowi nadwyżki spełniającemu ww. założenia prawdopodobieństwo ruiny aproksymowane **metodą deVyldera**.
Oznaczmy przez:

- $\Psi_{dV}(1)$ wartość tak uzyskanej aproksymacji dla procesu o parametrach $\left(u, c, \mu, \sigma^2, \mu_3\right)$, zaś przez:
- $\Psi_{dV}(2)$ wartość tak uzyskanej aproksymacji dla procesu o parametrach $\left(2u, 2c, 2\mu, 2\sigma^2, 2\mu_3\right)$

Zachodzi równość (wybierz poprawną odpowiedź):

(A) $\Psi_{dV}(2) = \left[\Psi_{dV}(1)\right]^2$

(B) $\Psi_{dV}(2) = \left(1 + \frac{2(c-\mu)}{\sigma^4} \cdot \frac{\mu_3}{3}\right) \cdot \left[\Psi_{dV}(1)\right]^2$

(C) $\Psi_{dV}(2) = \left(1 + \frac{(c-\mu)}{\sigma^4} \cdot \mu_3\right) \cdot \left[\Psi_{dV}(1)\right]^2$

(D) $\Psi_{dV}(2) = \left(1 + \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2} \cdot \frac{\mu_3}{3}\right) \cdot \left[\Psi_{dV}(1)\right]^2$

(E) $\Psi_{dV}(2) = \left(1 + \frac{(c-\mu)}{\sigma^2} \cdot \mu_3\right) \cdot \left[\Psi_{dV}(1)\right]^2$

*Uwaga: **metoda de Vyldera** polega na tym, iż $\Psi_{dV}$ wyznaczamy jako dokładne prawdopodobieństwo ruiny dla procesu aproksymującego $U_{dV}(t)$, w którym szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona, ich rozkład jest wykładniczy $(\beta_{dV})$, zaś parametry procesu aproksymującego $(\theta_{dV}, \lambda_{dV}, \beta_{dV})$ są tak dobrane, aby przyrosty procesu aproksymującego i przyrosty procesu aproksymowanego miały takie same momenty trzech pierwszych rzędów.*

**Zadanie 9.**
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + (c - d \cdot u) \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych normalnych.
Dokładniej, przyjmujemy że:

- $W_i \sim N(\mu, \sigma^2),\ \sigma^2 > 0$
- $u$ to nadwyżka początkowa
- $d$ to stopa dywidendy wypłacanej corocznie akcjonariuszom (kwota wypłacanej corocznie dywidendy wynosi $d \cdot u$)

Składkę $c$ kalkulujemy jako sumę trzech składników:
$c(u) = \mu + RiskLoading(u) + d \cdot u$,
wyznaczając równocześnie wysokość kapitału początkowego $u$ w taki sposób, aby składka była na konkurencyjnym poziomie (czyli jak najmniejsza).

Składnik $RiskLoading(u)$ wyznaczamy w taki sposób, aby zagwarantować iż prawdopodobieństwo ruiny nie przekroczy wartości $\exp(-2)$. Posługujemy się przy tym dla prostoty górnym ograniczeniem Lundberga na funkcję prawdopodobieństwa ruiny.

Przyjmijmy założenie liczbowe:
$d = 4\%$

Niech $c^*$ oznacza najmniejszą (na zbiorze $u \geq 0$) wartość składki $c(u)$.

$c^*$ wynosi:

(A) $c^* = \mu + 0.2 \cdot \sigma$

(B) $c^* = \mu + 0.3 \cdot \sigma$

(C) $c^* = \mu + 0.4 \cdot \sigma$

(D) $c^* = \mu + 0.5 \cdot \sigma$

(E) $c^* = \mu + 0.6 \cdot \sigma$

**Zadanie 10.**
Zmienne losowe $X_0, X_1, X_2,...$ mają złożone rozkłady Poissona.

Dla każdego $j = 0,1,2,...$ :

- $X_j = Y_j(1) + Y_j(2) + ... + Y_j(N_j)$ oznacza łączną wartość szkód zaszłych w pewnym miesiącu i zlikwidowanych w $j$ miesięcy później,
- $N_j$ oznacza ilość ww. szkód, i jest zmienną losową o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej równej $\lambda \cdot r_j$ ,
- zmienne $Y_j(1), Y_j(2), ..., Y_j(N_j)$ są niezależne nawzajem oraz od zmiennej $N_j$, i mają identyczny rozkład o wartości oczekiwanej równej $m \cdot w^j$ .

Zakładamy że parametry $\lambda$ oraz $m$ są dodatnie, zaś o parametrach $w$ oraz $r_0, r_1, r_2,...$ przyjmujemy konkretne założenia liczbowe:

- $w = 1.400$, oraz:
- $r_j = \dfrac{2^j}{j!} \cdot \exp(-2)$, $j = 0,1,2,...$

Stosunek oczekiwanej łącznej wartości szkód zlikwidowanych z opóźnieniem $j \leq 2$ do oczekiwanej łącznej wartości wszystkich szkód:

$$\frac{E(X_0) + E(X_1) + E(X_2)}{\sum_{j=0}^{\infty} E(X_j)}$$

wynosi:

(A) 0.677

(B) 0.623

(C) 0.570

(D) 0.518

(E) 0.469

# Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2002 r.

## Matematyka ubezpieczeń majątkowych

### Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ..................... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ...........................

~~Pesel~~ ...........................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | E | |
| 2 | D | |
| 3 | A | |
| 4 | D | |
| 5 | D | |
| 6 | A | |
| 7 | C | |
| 8 | B | |
| 9 | C | |
| 10 | E | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.