Zadanie 1.

Proces pojawiania się szkód w czasie $N(t)$ jest procesem o przyrostach niezależnych, o rozkładzie ujemnym dwumianowym danym dla każdego nieujemnego *t* oraz dodatniego *s* wzorem:

$$\Pr(N(t+s)-N(t)=k)=\frac{\Gamma(r\cdot s+k)}{k!\cdot\Gamma(r\cdot s)}\cdot(1-q)^{r\cdot s}\cdot q^{k}, \qquad k=0,1,...$$

gdzie $r>0$ oraz $q\in(0,1)$ to parametry procesu. Jeśli przyjmiemy wartość parametru q równą $\frac{1}{2}$, to granica prawdopodobieństw warunkowych:

$$\lim_{s\to 0}\Pr(N(t+s)-N(t)>1/N(t+s)-N(t)>0)$$

wyniesie:

(A) $1-\frac{1}{2\ln 2}$

(B) $1/3$

(C) $2/3$

(D) $\frac{1}{2\ln 2}$

(E) 1

Uwaga: Intuicyjnie - pytanie dotyczy prawdopodobieństwa, iż w momencie, w którym dojdzie do przyrostu procesu, wystąpi równocześnie więcej niż jedna szkoda

Zadanie 2.
Dwa ryzyka charakteryzują wartości parametru ryzyka odpowiednio Λ_1 i Λ_2.
Generują one w roku ilości szkód odpowiednio N_1 i N_2.
Momenty pierwszych dwóch rzędów z rozkładów warunkowych zmiennych N_1 i N_2 przy danych wartościach Λ_1 i Λ_2 wynoszą:
$E(N_i/\Lambda_1,\Lambda_2)=\Lambda_i$, $E[VAR(N_i/\Lambda_1,\Lambda_2)]=s^2$, $COV(N_1,N_2/\Lambda_1,\Lambda_2)=0$
natomiast o rozkładzie parametrów ryzyka Λ_1 i Λ_2 zakładamy że:
$E(\Lambda_i)=\Lambda$, $VAR(\Lambda_i)=a^2$, $COV(\Lambda_1,\Lambda_2)=0$
Na podstawie obserwacji z jednego roku zmiennych N_1 i N_2 przeprowadzamy predykcję parametru ryzyka Λ_1. Zakładamy, że znamy wartości parametrów a^2 oraz s^2, natomiast nie znamy wartości Λ. Rozważamy klasę predyktorów Λ_1 postaci:
$\hat{\Lambda}_1 = z\cdot N_1 + (1-z)\cdot N_2$,
Znajdź tę wartość parametru z, która minimalizuje błąd średniokwadratowy predyktora.

(A) $z=\dfrac{a^2}{s^2+a^2}$

(B) $z=\dfrac{a^2}{2s^2+a^2}$

(C) $z=\dfrac{s^2+a^2}{2s^2+a^2}$

(D) $z=\dfrac{2s^2+a^2}{2s^2+2a^2}$

(E) $z=\dfrac{s^2+2a^2}{2s^2+2a^2}$

Zadanie 3.

Niech:

$S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N(n)}$

będzie łączną wartością szkód z portfela n ryzyk, w którym $N(n)$ ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną $n \cdot \lambda$, gdzie λ jest częstotliwością szkód na jedno ryzyko. Przy danej wartości czynnika inflacji cenowej I zmienne Y_i są niezależne nawzajem oraz od zmiennej $N(n)$, z wartością oczekiwaną równą $E(Y_i/I) = I \cdot \mu_Y$ oraz wariancją $VAR(Y_i/I) = I^2 \cdot \sigma^2 < \infty$. Czynnik inflacyjny jest zmienną losową (oczywiście niezależną od zmiennej $N(n)$), o rozkładzie logarytmiczno-normalnym takim, że $\ln(I)$ ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 0,09 i wariancji 0,0004.

Współczynnik zmienności zmiennej S_n, to znaczy iloraz:

$$\frac{\sqrt{VAR(S_n)}}{E(S_n)},$$

przy rosnących nieograniczenie rozmiarach portfela, a więc przy $n \to \infty$ dąży do:

(A) 0.05

(B) 0.03

(C) 0.02

(D) 0

(E) brak danych, aby udzielić odpowiedzi liczbowej

Zadanie 4.
Łączna wartość odszkodowań z pewnego portfela ryzyk ze szkód danego roku wynosi $X_0 + X_1$, gdzie X_0 to odszkodowania wypłacane jeszcze w tym samym roku, zaś X_1 to odszkodowania do wypłacenia w latach następnych (rezerwa).
Zakładamy, iż X_0 i X_1 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Gamma z parametrami odpowiednio (α_0, β) oraz (α_1, β), to znaczy gdzie gęstości na półosi dodatniej są postaci:

$$f_i(x) = \frac{\beta^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \cdot x^{\alpha_i - 1} \cdot \exp(-\beta \cdot x) \qquad i = 0, 1.$$

Tak α_0 jak i α_1 są liczbami większymi od czterech (współczynniki skośności są mniejsze od 1)

Wartość oczekiwana stosunku rezerw do wypłat dokonanych w roku $E\left(\frac{X_1}{X_0}\right)$ wynosi:

(A) $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$

(B) $\frac{\alpha_1}{\alpha_0 - 1}$

(C) $\frac{\alpha_1 + 1}{\alpha_0 - 1}$

(D) $\frac{\alpha_1 + \frac{1}{2}}{\alpha_0 - \frac{1}{2}}$

(E) $\frac{\alpha_1}{\alpha_0 - \frac{1}{2}}$

Zadanie 5.

Rozkład wartości pojedynczej szkody Y jest mieszanką dwóch rozkładów wykładniczych, i na półosi dodatniej jego gęstość dana jest wzorem:

- $f_Y(x) = \frac{1}{4} \cdot [\exp(-x)] + \frac{3}{4} \cdot [3 \cdot \exp(-3x)]$

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela w czasie ciągłym. Tak więc szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ, a składka napływa w sposób ciągły, przekraczając o $\theta = 60\%$ oczekiwany przyrost łącznej wartości szkód, a więc intensywność składki wynosi $c = 160\% \cdot \lambda \cdot E(Y)$.

Wiadomo, iż funkcja prawdopodobieństwa ruiny w tym modelu wyraża się wzorem:

- $\Psi(u) = C_1 \cdot \exp(-r_1 \cdot u) + C_2 \cdot \exp(-r_2 \cdot u)$,

gdzie r_1 oraz r_2 to pierwiastki odpowiedniego równania.

Pierwsza część zadania została już wykonana - obliczono mianowicie, iż:

- $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{9}{4}$.

Współczynniki C_1 i C_2 funkcji $\Psi(u)$ wynoszą:

(A) $C_1 = \frac{9}{16}$ $C_2 = \frac{1}{16}$

(B) $C_1 = \frac{13}{24}$ $C_2 = \frac{2}{24}$

(C) $C_1 = \frac{17}{32}$ $C_2 = \frac{3}{32}$

(D) $C_1 = \frac{22}{40}$ $C_2 = \frac{3}{40}$

(E) $C_1 = \frac{30}{56}$ $C_2 = \frac{5}{56}$

Zadanie 6.

X_1, X_2 oraz X_3 to trzy niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, danym w poniższej tabelce:

x	$\Pr(X = x)$
0	0.7
1	0.1
2	0.1
3	0.1

$\Pr(X_1 + X_2 + X_3 \le 3)$ wynosi:

(A) 0.836

(B) 0.842

(C) 0.848

(D) 0.854

(E) 0.860

Zadanie 7.
Rozkład wartości pojedynczej szkody Y jest rozkładem Pareto, takim że ogon dystrybuanty dany jest na półosi dodatniej wzorem:

- $1-F_Y(x)=\left(\dfrac{\gamma}{\gamma+x}\right)^{\alpha}$

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela w czasie ciągłym. Tak więc szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ, a składka napływa w sposób ciągły, przekraczając oczekiwany przyrost łącznej wartości szkód, a więc intensywność składki wynosi $c=(1+\theta)\cdot\lambda\cdot E(Y)$, gdzie $\theta>0$.
Wiadomo, iż funkcję prawdopodobieństwa ruiny możemy wyrazić w postaci:

- $\Psi(u)=1-F_L(u)$,

gdzie maksymalną łączną wartość straty L możemy przedstawić jako zmienną o rozkładzie złożonym:
$L=l_1+\ldots+l_N$,

gdzie N ma rozkład geometryczny o ilorazie postępu $\dfrac{1}{1+\theta}$, zaś l_i to kolejna wysokość drabinowa (wysokość kolejnego „tąpnięcia” poniżej dotychczas osiągniętego minimum procesu).
Jeśli przyjmiemy, że parametry rozkładu zmiennej Y wynoszą:

- $\gamma=10$, $\alpha=4$,

to $\Pr\left(l_i>\dfrac{10}{3}\right)$ wyniesie:

(A) $\dfrac{81}{128}$

(B) $\dfrac{72}{128}$

(C) $\dfrac{63}{128}$

(D) $\dfrac{54}{128}$

(E) $\dfrac{45}{128}$

Zadanie 8.
Wartości pojedynczych szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Gamma o parametrach (α, β) równych $(3, 1)$, to znaczy o gęstości określonej na półosi dodatniej wzorem:

$$f_Y(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \exp(-x),$$

i ponadto niezależnymi od ilości szkód w ciągu roku, która to ilość ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 12.
Łączną wartość szkód w ciągu roku przybliżamy przesuniętym rozkładem Gamma o parametrach (x_0, α_0, β_0), a więc rozkładem, który ma zmienna losowa $(X + x_0)$, jeśli sama zmienna X ma rozkład Gamma (α_0, β_0). Parametry wybieramy tak, aby rozkład aproksymujący i aproksymowany miały te same momenty pierwszych trzech rzędów. Parametry rozkładu aproksymującego (x_0, α_0, β_0) wynoszą:

(A) $x_0 = -36$; $\alpha_0 = 144$; $\beta_0 = 2$

(B) $x_0 = -21.6$; $\alpha_0 = 23.04$; $\beta_0 = 0.4$

(C) $x_0 = 7.2$; $\alpha_0 = 5.76$; $\beta_0 = 0.2$

(D) $x_0 = 9.71$; $\alpha_0 = 4.8$; $\beta_0 = 0.183$

(E) $x_0 = 17.41$; $\alpha_0 = 2.40$; $\beta_0 = 0.129$

Zadanie 9.
W pewnym portfelu ryzyk ubezpieczycielowi udaje się rekompensować sobie 30% wartości pierwotnie wypłaconych odszkodowań w formie regresów. Oczywiście między zajściem szkody a wypłatą odszkodowania występuje opóźnienie, a także regresy występują z opóźnieniem w stosunku do wypłat odszkodowań.

- Rozkład opóźnienia od szkody do wypłaty odszkodowania dany jest współczynnikami:

$w_0 = 40\%$, $w_1 = 30\%$, zaś dla $j > 1$ $w_j = \frac{1}{2} w_{j-1}$,

gdzie w_j oznacza udział wypłat odszkodowań dokonanych w miesiącu $t + j$ ze szkód zaszłych w miesiącu *t* w całkowitej wartości odszkodowań ze szkód z miesiąca *t*.

- Rozkład opóźnienia od wypłaty odszkodowania do regresu z tego tytułu dany jest współczynnikami:

$r_0 = 0\%$, $r_1 = 50\%$, zaś dla $j > 1$ $r_j = \frac{1}{2} r_{j-1}$,

gdzie r_j oznacza udział regresów uzyskanych w miesiącu $\tau + j$ z tytułu odszkodowań wypłaconych w miesiącu τ w całkowitej wartości regresów z tytułu odszkodowań wypłaconych w miesiącu τ.
Rozkład opóźnienia regresów w stosunku do wypłaty odszkodowań jest taki sam bez względu na to jak odszkodowanie było opóźnione w stosunku do zajścia szkody.

Niech net_j dla $j = 0,1,2,...$ oznacza wypłaty netto (odszkodowania minus regresy) dokonane w miesiącu $t + j$ z tytułu szkód zaszłych w miesiącu *t*, podzielone przez całkowitą wartość odszkodowań za szkody z tego miesiąca. Oczywiście zachodzi:
$\sum_{j=0}^{\infty} net_j = 70\%$.
Współczynnik net_3 wynosi:

(A) 0.06

(B) 0.015

(C) 0

(D) -0.00375

(E) -0.0075

Zadanie 10.
Ryzyko X ma rozkład Pareto taki że ogon dystrybuanty dany jest na półosi dodatniej wzorem:

$1-F_X(x)=\left(\frac{\gamma}{\gamma+x}\right)^{\alpha}$, z parametrami równymi $\gamma=10$ oraz $\alpha=3$.

Rozważamy trzy formuły składki:

- $\Pi_1(X)=E(X)+c\cdot VAR(X)$ z parametrem $c>0$
- $\Pi_2(X)=F_X^{-1}(1-\varepsilon)$ z parametrem $\varepsilon\in(0,1)$
- $\Pi_3(X)=\int_0^{\infty}(1-F_X(x))^{\delta}\,dx$ z parametrem $\delta\in(0,1)$

Przyjęto wartość parametru z pierwszej formuły równą $c=\frac{1}{15}$.

Dobierz parametry ε oraz δ tak, aby formuły druga i trzecia dawały identyczną wycenę ryzyka X co formuła pierwsza, a więc aby zachodziły równości:
$\Pi_1(X)=\Pi_2(X)=\Pi_3(X)$

(A) $\varepsilon=\frac{8}{125}$, $\delta=\frac{2}{3}$

(B) $\varepsilon=\frac{1}{8}$, $\delta=\frac{5}{9}$

(C) $\varepsilon=\frac{8}{125}$, $\delta=\frac{5}{9}$

(D) $\varepsilon=\frac{1}{8}$, $\delta=\frac{2}{3}$

(E) $\varepsilon=\frac{27}{125}$, $\delta=\frac{5}{6}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 24 marca 2001 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	E	
3	C	
4	B	
5	E	
6	C	
7	D	
8	B	
9	B	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.