Zadanie 1.
Łączna wartość szkód w pewnym portfelu ryzyk:
$S = Y_1 + \ldots + Y_N$,
ma złożony rozkład Poissona, gdzie $E(N) = 100$ i rozkład wartości pojedynczej szkody Y jest taki, że:

- $E(Y) = 22$
- $E(Y^2) < \infty$
- $\Pr(Y > 20) = 0{,}40$
- wartość oczekiwana nadwyżki szkody ponad 20 wynosi $E[(Y-20)_+] = 10$

Niech teraz zmienna S_R oznacza łączną wartość nadwyżek każdej ze szkód ponad wartość 20, pokrywaną przez reasekuratora:
$S_R = (Y_1 - 20)_+ + \ldots + (Y_N - 20)_+$,
zaś zmienna $S_U = S - S_R$ oznacza pozostałą na udziale własnym ubezpieczyciela kwotę, a więc:
$S_U = \min\{Y_1, 20\} + \ldots + \min\{Y_N, 20\}$

Ile wynosi $COV(S_R, S_U)$? (wybierz najtrafniejszą odpowiedź)

(A) 8 000

(B) 10 000

(C) 16 000

(D) 20 000

(E) brakuje danych, by podać odpowiedź liczbową

Zadanie 2.
Łączna wartość szkód z polisy wynosi:
$X = Y_1 + \ldots + Y_N$, (zero, jeśli $N = 0$).
Przy danej wartości parametru ryzyka $\Lambda = \lambda$ zmienna X ma rozkład złożony Poissona z oczekiwaną ilością szkód równą $E(N/\Lambda = \lambda) = \lambda$ oraz rozkładem pojedynczej szkody o wartości oczekiwanej $E(Y/\Lambda = \lambda) = \frac{40}{3} \cdot e^{-\cdot\lambda}$.
Zróżnicowanie parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych opisuje rozkład Gamma o parametrach $(2, 10)$, tzn. o gęstości na półosi dodatniej danej wzorem:
$f_\Lambda(\lambda) = 10^2 \cdot \lambda \cdot e^{-10\cdot\lambda}$.
Wartość oczekiwana (bezwarunkowa) zmiennej X wynosi:

(A) 2,00

(B) 2,06

(C) 2,13

(D) 2,20

(E) 2,27

Zadanie 3.
Ilość szkód z *N* pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą λ, a wartości kolejnych szkód $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ są zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie, niezależnymi nawzajem i niezależnymi od zmiennej *N*.
Rozkład wartości pojedynczej szkody określony jest na przedziale $(0,1]$ i ma wartość oczekiwaną równą $\mu \in (0,1)$.

Ubezpieczyciel wystawia na to ryzyko polisę z sumą ubezpieczenia 1, z pokryciem każdej kolejnej szkody proporcjonalnym do „nieskonsumowanej do tej pory" części sumy ubezpieczenia, a więc:

- za (ewentualną) szkodę Y_1 wypłaca odszkodowanie w pełnej wysokości Y_1
- za (ewentualną) szkodę Y_2 wypłaca odszkodowanie w wysokości $(1-Y_1)\cdot Y_2$
- za (ewentualną) szkodę Y_3 wypłaca odszkodowanie w wysokości $[1-Y_1-(1-Y_1)\cdot Y_2]\cdot Y_3$, co równe jest $(1-Y_1)\cdot(1-Y_2)\cdot Y_3$
- za (ewentualną) szkodę Y_4 wypłaca odszkodowanie w wysokości $[1-Y_1-(1-Y_1)Y_2-(1-Y_1)(1-Y_2)Y_3]\cdot Y_4$, co równa się $(1-Y_1)(1-Y_2)(1-Y_3)\cdot Y_4$,

itd.
Składka netto za to ubezpieczenie wynosi:

(A) $1-e^{-\lambda\mu}$

(B) $1-\mu\cdot e^{-\lambda\mu}$

(C) $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda\mu}\right)$

(D) $\dfrac{\mu}{1-\mu}\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot(1-\mu)}\right)$

(E) $\dfrac{\mu}{1-\mu}\cdot e^{-\lambda\mu}\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot(1-\mu)}\right)$

Zadanie 4.

Pewne ryzyko generuje w kolejnych czterech kwartałach roku szkody o łącznej wartości $X_1, X_2, X_3\ X_4$. Zmienne losowe X_i mają identyczny rozkład wykładniczy i są nawzajem niezależne. Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cały rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie kwartału (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

(A) 19/48

(B) 21/48

(C) 23/48

(D) 25/48

(E) 27/48

Zadanie 5.

Łączna wartość szkód z polisy wynosi $X = Y_1 + \ldots + Y_N$, (zero, jeśli $N = 0$).

X ma złożony rozkład Poissona, z wartością oczekiwaną zmiennej N równą:

$E(N) = \ln\left(1 + \tfrac{1}{3}\right)$

zaś Y ma rozkład logarytmiczny:

$$\Pr(Y = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \cdot \frac{c^k}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

z parametrem $c = 0.25$

Znajdź taką liczbę k, że:

$$\Pr(X > k) < \frac{1}{1000} < \Pr(X \geq k)$$

(A) $k = 3$

(B) $k = 4$

(C) $k = 5$

(D) $k = 6$

(E) $k = 7$

Zadanie 6.
Ilość szkód z pewnego ryzyka ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą λ rocznie. Wartości szkód Y_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie ciągłym, niezależnymi także od liczby szkód. W związku z istniejącym systemem zniżek ubezpieczony przyjmuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:

- nie zgłasza szkód, dopóki któraś z nich nie przekroczy liczby x_0
- jeśli wartość którejś szkody przekroczy liczbę x_0, to jest ona zgłaszana, a następne (ewentualne) szkody zgłaszane są już bez względu na ich wysokość.

Przyjmujemy założenie, iż jeśli szkoda *n*-ta nie została zgłoszona, to tej decyzji nie można już zmienić w momencie zajścia $(n+1)$-szej szkody (decyzje o niezgłaszaniu szkód są nieodwołalne).

Oznaczmy dla uproszczenia przez *F* prawdopodobieństwo, iż wartość szkody nie przekroczy liczby x_0.
Prawdopodobieństwo, iż ubezpieczony zgłosi dokładnie jedną szkodę (w ciągu roku) wynosi:

(A) $e^{-\lambda\cdot(1-F)}$

(B) $e^{-\lambda\cdot(1-F)}\cdot\lambda\cdot(1-F)$

(C) $e^{-\lambda\cdot(1-F)}\cdot\dfrac{1-F}{F}\left(1-e^{-\lambda F}\right)$

(D) $e^{-\lambda\cdot(1-F)}\cdot\lambda\cdot(1-F)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\lambda F\right)$

(E) $e^{-\lambda\cdot(1-F)}\cdot\dfrac{1-F}{F^2}\left(1-e^{-\lambda F}-\lambda F\cdot e^{-\lambda F}\right)$

Zadanie 7.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$, gdzie:

- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$,
- $Y_1, Y_2, \ldots$ są wartościami kolejnych szkód - niezależnymi, o identycznych rozkładach danych dystrybuantą $F(\cdot)$
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ .

Oznaczmy przez Ψ prawdopodobieństwo ruiny:
$\Psi = \Pr(T < \infty)$, gdzie T oznacza moment zajścia ruiny:
$T = \inf\{t: \quad t \geq 0, \quad U(t) < 0\}$.

Rozważmy dwa warianty procesu, różniące się parametrami:

	c	λ	u	$F(\cdot)$
Wariant 1	2	4	2	$F_1(\cdot)$
Wariant 2	12	8	6	$F_2(\cdot)$

Relacja dystrybuanty F_2 do dystrybuanty F_1 jest postaci:

- $\forall x \in R \quad F_2(x) = F_1\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$

O procesie w wariancie 1 wiemy, że:
$\{\Psi, \quad E(T|T < \infty), \quad E(U(T)|T < \infty)\} = \{0.2, \quad 6, \quad -2\}$.
Wobec tego, w wariancie 2 procesu trójka $\{\Psi, \quad E(T|T < \infty), \quad E(U(T)|T < \infty)\}$ wyniesie:

(A) $\{0.2, \quad 3, \quad -6\}$

(B) $\{0.2, \quad 6, \quad -6\}$

(C) $\{0.5, \quad 3, \quad -2\}$

(D) $\{0.5, \quad 2, \quad -4\}$

(E) $\{0.5, \quad 2, \quad -6\}$

Zadanie 8.
Likwidacja szkody zaistniałej w miesiącu t następuje w tym samym miesiącu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, a w miesiącu $t + k$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$.
Wartość każdej szkody wynosi 1. W miesiącach t, t+1 i t+2 zaistniało odpowiednio 33, 40 i 48 szkód. Wyznacz stan rezerwy szkodowej na koniec miesiąca t+2, jeśli na początku miesiąca t stan tej rezerwy wynosił 54.

(A) 79

(B) 81

(C) 83

(D) 85

(E) brakuje danych o strukturze rezerwy na początku t-tego miesiąca

Zadanie 9.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$, gdzie:

- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$,
- $Y_1, Y_2, \ldots$ są wartościami kolejnych szkód - niezależnymi, o identycznym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną μ
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ .
- $c = 1$ oraz $\lambda \cdot \mu < 1$, (składka równa 1 na jednostkę czasu, oczekiwany przyrost łącznej wartości szkód mniejszy od 1).

Niech $0 < a < u$. Niech

$$T_a = \begin{cases} \min\{t > 0 : U(t) < a\}, & gdy \quad \{t > 0 : U(t) < a\} \neq \emptyset; \\ \infty & gdy \quad \{t > 0 : U(t) < a\} = \emptyset, \end{cases}$$

$$T_0 = \begin{cases} \min\{t > 0 : U(t) < 0\}, & gdy \quad \{t > 0 : U(t) < 0\} \neq \emptyset; \\ \infty & gdy \quad \{t > 0 : U(t) < 0\} = \emptyset. \end{cases}$$

Obliczyć $\Pr(T_a = T_0 / T_0 < \infty)$.

(A) $\exp[-a\lambda]$

(B) $\exp[-a/\mu]$

(C) $\exp\left[-a\left(\frac{1}{\mu} - \lambda\right)\right]$

(D) $\exp[-a\lambda/u]$

(E) $\exp\left[-\frac{a}{u\mu}\right]$

Zadanie 10.

Liczby szkód $N_1,...N_t, N_{t+1}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $\Lambda = \lambda$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ. Niech $N = N_1 + ... + N_t$. Parametr Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma o gęstości:

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta \cdot \lambda}, \ \lambda > 0 .$$

Obliczyć $VAR(N_{t+1} / N_1,..., N_t)$.

(A) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha + N}{(\beta + t)^2}$

(B) $\frac{\alpha + N}{\beta + t}$

(C) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}$

(D) $\frac{\alpha + N}{\beta + t} + \frac{\alpha + N}{(\beta + t)^2}$

(E) $\frac{\alpha + N}{\beta + t} + \frac{\alpha}{\beta^2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 9 grudnia 2000 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~.................... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	A	
4	D	
5	B	
6	C	
7	A	
8	C	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.