Zadanie 1.
Pan Jan Kowalski jest handlowcem posiadającym sklep o wartości K = 1 mln zł, ponadto posiada inny znacznej wartości majątek, zainwestowany miedzy innymi w aktywa pozbawione ryzyka, jednakże jego wartość nie została precyzyjnie oszacowana.
Funkcja użyteczności opisująca preferencje Pana Kowalskiego ma postać:

$u(x) = -A\, e^{-ax} + B,$
$A = 3,$
$B = 6,$
$a = 10^{-3}$ zł$^{-1}$.

Pan Kowalski postanowił ubezpieczyć sklep od kradzieży. Oszacował, że prawdopodobieństwo kradzieży wynosi $p = 0{,}5$, natomiast wysokość łącznej szkody opisuje funkcja gęstości prawdopodobieństwa będąca przesuniętym rozkładem gamma

$\Gamma(x_0, \alpha, \beta)$
$x_0 = 1000$ zł
$\alpha = 2$
$\beta = 2 \cdot 10^{-3}$ zł$^{-1}$

Ile będzie skłonny zapłacić Jan Kowalski za ubezpieczenie sklepu, zwracające całą wartość powstałej szkody? Podaj najbliższą wartość.

(A) Nie można podać jednoznacznej odpowiedzi (nie mamy precyzyjnych danych na temat całego majątku Pana Kowalskiego).

(B) 980 zł

(C) 1380 zł

(D) 1780 zł

(E) 2180 zł

Zadanie 2. Rozważmy następujące ubezpieczenie:
Prawdopodobieństwo zaistnienia szkody wynosi $p = 0{,}01$, zaś wartość szkody, o ile zajdzie, ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej μ.
Pierwotnie ubezpieczenie zawierało kwotowy udział własny w wysokości 100 zł. Wtedy też skalkulowano składkę brutto P zwiększając składkę netto o 25-procentowy narzut.
Ubezpieczyciel proponuje klientowi kontrakt zmodyfikowany, zgodnie z którym zobowiązuje się w razie zajścia szkody w kwocie y do wypłaty odszkodowania:
$I(y) = \min\{(y - 100)_+, \quad 0.7 \cdot y\}$,
oferując w zamian klientowi rabat r wyrażony w procentach składki brutto P. Zakłada się, iż kwota narzutu na składkę netto pozostaje bez zmian. Największa możliwa (ze względu na możliwe wartości parametru μ) wartość r wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) 21%

(B) 24%

(C) 27%

(D) 30%

(E) 33%

Zadanie 3. Łączna wartość szkód dla portfela ryzyk ma złożony rozkład Poissona z częstotliwością $\lambda = 10$ i rozkładem prawdopodobieństwa wartości pojedynczej szkody Y danym wzorem:

$\Pr(Y = i) = 0{,}5^i$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots$

Reasekurator pokrywa każdą szkodę w wysokości różnicy miedzy wartością szkody a zachowkiem $z_1 = 2$, jeżeli ta różnica jest dodatnia, jednak nie więcej niż do kwoty $z_2 = 3$.
Składka dla reasekuratora została skalkulowana jako suma wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego łącznej wypłaty na udziale reasekuratora. Ile wynosi składka dla reasekuratora? Podaj najbliższą wartość.

(A) 7,44

(B) 7,80

(C) 8,16

(D) 8,52

(E) 9,88

Zadanie 4. Towarzystwo ubezpieczeniowe prowadzi działalność w Dziale II grupie 2 - ubezpieczenia choroby.
W ramach jednorocznego grupowego ubezpieczenia choroby ubezpieczyciel wypłaca pracownikowi jednorazowe świadczenie w wysokości:

- 1000 zł w przypadku wystąpienia w okresie ubezpieczenia choroby A,
- 1000 zł w przypadku wystąpienia w okresie ubezpieczenia choroby B.

Zakładamy że:

- zachorowania poszczególnych osób są niezależne,
- wypłata świadczenia z tytułu danej choroby wyklucza w okresie ubezpieczenia ponowną wypłatę świadczenia z tytułu tej samej choroby; nie wyklucza wypłaty świadczenia z tytułu innej choroby,
- $p_A = 0{,}01$ p-stwo zachorowania pracownika wyłącznie na chorobę A,
- $p_B = 0{,}01$ p-stwo zachorowania pracownika wyłącznie na chorobę B,
- $p_{AB} = 0{,}02$ p-stwo zachorowania pracownika najpierw na chorobę A, potem na B,
- $p_{BA} = 0$ p-stwo zachorowania pracownika najpierw na chorobę B, potem na A.

Grupa pracowników ma liczebność $n = 250$ osób.
Składka netto dla grupy została skalkulowana w wysokości sumy wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego sumarycznej wypłaty.
Ile wynosi składka netto dla grupy? Podaj najbliższą wartość.

(A) 16 000 zł

(B) 18 000 zł

(C) 20 000 zł

(D) 22 000 zł

(E) 24 000 zł

Zadanie 5. Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona ze stosunkowym narzutem bezpieczeństwa na składkę netto θ . Wartość pojedynczej szkody X jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Ile wynoszą wartość oczekiwana $E(L_1)$ i wariancja $Var(L_1)$ wartości, o którą nadwyżka spada po raz pierwszy poniżej poziomu wyjściowego?

(A) $E(L_1) = \frac{3}{4}$, $Var(L_1) = \frac{7}{16}$

(B) $E(L_1) = \frac{3}{4}$, $Var(L_1) = \frac{8}{16}$

(C) $E(L_1) = 1$, $Var(L_1) = \frac{7}{16}$

(D) $E(L_1) = 1$, $Var(L_1) = \frac{8}{16}$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

Zadanie 6. Towarzystwo ubezpieczeniowe oferujące ubezpieczenia mieszkaniowe stosuje regionalne zróżnicowanie taryfy. Towarzystwo to rozpoczęło działalność w nowym regionie, w związku z czym rozpoczęło prace w celu określenia wartości oczekiwanej pojedynczej szkody.

Dotychczas zaobserwowano w tym regionie 20 szkód, ich wartość średnia wyniosła 7000 zł.

W skali całego kraju średnia wartość szkody wynosi 5000 zł.

Dotychczasowe doświadczenie pozwala na stwierdzenie, że wysokość szkód w poszczególnych regionach można w przybliżeniu opisać rozkładem normalnym o wartości średniej μ_i i odchyleniu standardowym $\sigma_i = \frac{\mu_i}{2}$.

Zmienność parametru μ_i pomiędzy poszczególnymi regionami jest opisywana rozkładem gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha = 5$, $\beta = 0{,}001$ zł$^{-1}$.

Znajdź wartość oczekiwaną następnej szkody w nowym regionie estymując ją najlepszym liniowym estymatorem w klasycznym modelu Bühlmanna. Podaj najbliższą wartość.

(A) 6900 zł

(B) 6860 zł

(C) 6820 zł

(D) 6780 zł

(E) 6740 zł

Zadanie 7. Polisa ubezpieczeniowa zawarta na rok czasu, przewiduje wypłatę *świadczenia* związanego z wystąpieniem zdarzenia ubezpieczeniowego oraz na koniec okresu ubezpieczeniowego wypłatę *dywidendy*.

- Wysokość świadczenia wypłaconego w okresie ubezpieczenia jest zmienną losową określoną przez jednostajny rozkład prawdopodobieństwa na odcinku $[0; A]$, $A = 100\,000$ zł.
- Składka brutto P została skalkulowana na poziomie 150% wartości oczekiwanej świadczenia.
- Koszty K, uwzględniające koszty zawarcia ubezpieczenia, koszty administracyjne oraz inne koszty a także zysk ubezpieczyciela, zostały skalkulowane na poziomie 25% składki brutto.
- Dywidenda D jest kalkulowana według formuły:

$D = \delta \max[0; P - K - C]$,
C suma wypłaconych świadczeń w okresie ubezpieczenia,
δ współczynnik dywidendy.

Jaka jest wartość współczynnika dywidendy δ, przy którym składka pokryje oczekiwane rozchody (podaj najbliższą wartość)?

(A) 20%

(B) 40%

(C) 60%

(D) 80%

(E) 100%

Zadanie 8. Liczba szkód zaistniałych w czasie t jest procesem stochastycznym $\{N(t)\,,t \geq 0\}$. Przyjmijmy, że czas $t=0$ odpowiada dniu 1 stycznia 1999 roku, a jednostką czasu jest 1 miesiąc, przy czym dla uproszczenia przyjmujemy, że każdy miesiąc ma 30 dni.
Czasy oczekiwania pomiędzy następującymi po sobie szkodami, są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa i dystrybuancie

$$F(t)=1-e^{-10\,t}\,.$$

Znajdź prawdopodobieństwo, że dokładnie 5 szkód wystąpi pomiędzy 1 kwietnia 1999 a 15 kwietnia 1999. Podaj najbliższą wartość.

(A) 0,06

(B) 0,12

(C) 0,18

(D) 0,24

(E) 0,30

Zadanie 9. Ilość szkód N ma rozkład dany rekurencyjnie:

$$\Pr(N=0)=\frac{1}{27},$$

$$\frac{\Pr(N=k)}{\Pr(N=k-1)}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3\cdot k}, \qquad k=2,3,\dots .$$

Stosunek wariancji do wartości oczekiwanej zmiennej N wynosi:

(A) 1

(B) 1,5

(C) 2

(D) 2,5

(E) 3

Zadanie 10. W ciągu pierwszych trzech lat działalności ubezpieczyciel majątkowy miał następujące wyniki (mln ECU):

	1 rok	2 rok	3 rok
Przypis	5,0	9,0	12,0
udział reasekuratora	0,2	0,4	0,5
Odszkodowania	1,2	4,0	9,0
udział reasekuratora	-	0,6	-
Rezerwa składek	0,9	3,0	5,0
udział reasekuratora		0,1	0,2
Rezerwa szkód	0,5	3,0	6,0
udział reasekuratora		-	0,6

Margines wypłacalności na koniec 3 roku wynosi (mln ECU):

(A) 1,66

(B) 1,68

(C) 1,99

(D) 2,01

(E) 2,04

Egzamin dla Aktuariuszy z 27 marca 1999 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	A	
4	C	
5	C	
6	B	
7	B	
8	C	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.