Zadanie 1. W kolejnych okresach czasu $j = 1, 2, 3$ ubezpieczony, charakteryzujący się parametrem ryzyka Θ, generuje N_j szkód. Dla danego $\Theta = \theta$ zmienne N_1, N_2, N_3 są warunkowo niezależne i:

$$\Pr\left(N_j = n \middle| \Theta = \theta\right) = e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^n}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Parametr ryzyka w populacji ubezpieczonych przyjmuje wartości: 1 lub 2.
Mamy do czynienia z dwuetapowym doświadczeniem losowym:

- najpierw losujemy ubezpieczonego zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa $\Pr(\Theta = 1) = 0.5 = \Pr(\Theta = 2)$
- następnie obserwujemy liczby generowanych przez niego szkód N_1 i N_2.

Staramy się przewidzieć liczbę szkód w następnym okresie, czyli N_3.
Jeśli wiadomo, że: $N_1 + N_2 = 2$, to (warunkowe) prawdopodobieństwo tego, że $N_3 = 0$ jest równe:

(A) 0.50

(B) 0.37

(C) 0.29

(D) 0.25

(E) 0.23

Zadanie 2. W pewnym ubezpieczeniu jedynie pewna część szkód jest zgłaszana. Niech K oznacza liczbę szkód zaszłych, zaś N – liczbę szkód zgłoszonych. Niech i numeruje szkody zaszłe. Niech teraz M_i oznacza zmienną przyjmującą wartość 1 gdy i-tą szkodę zgłoszono, – a wartość 0 – gdy jej nie zgłoszono. Wtedy:
$N = M_1 + M_2 + \cdots + M_K$
Załóżmy, że M_i są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i od zmiennej K, oraz iż zmienna K ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r, q), tzn.:
$$\Pr(K = k) = \binom{r+k-1}{k} \cdot (1-q)^r \cdot q^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$
Załóżmy także, iż dla wszystkich M_i mamy:
$\Pr(M_i = 1) = 1 - \Pr(M_i = 0) = q_1$.
Przyjmijmy ponadto oznaczenie: $p = 1 - q$ oraz $p_1 = 1 - q_1$.
Zmienna losowa N ma rozkład prawdopodobieństwa:

(A) ujemny dwumianowy z parametrami $(r, \quad q \cdot q_1)$

(B) ujemny dwumianowy z parametrami $\left(r, \quad \dfrac{q \cdot q_1}{1 - q \cdot p_1}\right)$

(C) ujemny dwumianowy z parametrami $\left(r \cdot \dfrac{1 - q \cdot q_1}{p}, \quad q \cdot q_1\right)$

(D) ujemny dwumianowy z parametrami $\left(r \cdot \dfrac{1 - q \cdot q_1}{p}, \quad q \cdot q_1 + p \cdot p_1\right)$

(E) inny niż ujemny dwumianowy

Zadanie 3. Liczba szkód generowanych przez pewną grupę ryzyk w ciągu miesiąca ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 33.33. Wysokość pojedynczej szkody ma rozkład prawdopodobieństwa o wartości oczekiwanej 8 i odchyleniu standardowym 6. Wysokości szkód i liczby szkód w kolejnych miesiącach są niezależne. Niech S_{12} oznacza łączną wartość szkód w ciągu roku.
Niech q będzie liczbą taką, że $\Pr(S_{12} > q) = 0.95$.
Jeśli zastosujemy aproksymację normalną, to otrzymamy q równe:

(A) 4000

(B) 4465

(C) 4329

(D) 3529

(E) 3715

Zadanie 4. Proces nadwyżki ubezpieczyciela opisany jest przez klasyczny model:
$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$,
gdzie u jest nadwyżką początkową,
ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
$N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat, gdzie pojedyncze wypłaty:
X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$, o identycznym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną μ.
Parametry procesu są następujące:
$u = 0, \quad \mu = 1, \quad \lambda = 5$.
Niech:
$$T = \begin{cases} \inf\{t > 0 : \; U(t) < 0\} & o\ ile\ U(t) < 0\ dla\ pewnego\ t > 0 \\ \infty & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$
Przypuśćmy, że decydent posługuje się funkcją użyteczności:
$$w(y) = \begin{cases} 1 - \exp(-0.5 \cdot y) & dla \quad y \in R \\ 1 & dla \quad y = \infty \end{cases}$$
i zdecyduje się na podjęcie działalności ubezpieczeniowej, jeśli stwierdzi iż:
$E(w(U(T))) > w(0)$.
Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy:

(A) $c > 7.5$

(B) $c > 2.5$

(C) $c > 10$

(D) $c > 5$

(E) dla żadnych c nie jest spełniony

Zadanie 5. Łączna wartość szkód S wyraża się wzorem:

$S = X_1 + \cdots + X_N$

gdzie wartości poszczególnych szkód (X_i to wartość i-tej szkody) są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem oraz od zmiennej N (liczby szkód). Każda ze zmiennych X_i ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2, zaś N ma rozkład geometryczny z ilorazem postępu 0.5.

$\Pr(S \leq 4\ln 5)$ wynosi:

(A) 0.9

(B) 0.8

(C) 0.6

(D) 0.5

(E) 0.3

Wskazówka: Zauważ, że funkcja tworząca momenty zmiennej losowej S jest postaci:

$$p + (1-p)\cdot\frac{a}{a-t}$$

Zadanie 6. Łączna wartość roszczeń S wyraża się wzorem:
$S = X_1 + \cdots + X_N$
gdzie wartości poszczególnych roszczeń (X_i to wartość i-tego roszczenia) są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem oraz od zmiennej N (liczby szkód). Wiemy, że N ma rozkład Poissona z parametrem intensywności 5. Wartości pojedynczych roszczeń mają rozkład:
$\Pr(X_i = 1) = 0.6$
$\Pr(X_i = 2) = 0.4$.
Przypuśćmy, że:

- roszczenia opiewające na kwotę 1 oddalane są z prawdopodobieństwem $1/3$, zaś uznawane (i pokrywane) w pełni z prawdopodobieństwem $2/3$;
- roszczenia opiewające na kwotę 2 oddalane są z prawdopodobieństwem $1/2$, zaś uznawane (i pokrywane) w pełni z prawdopodobieństwem $1/2$.

Dzieje się tak dla każdej szkody niezależnie od innych szkód. Niech $\widetilde{S}$ oznacza łączną wartość roszczeń uznanych.
$\Pr(\widetilde{S} \geq 3)$ wynosi:

(A) $1 - \left(1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!}\right) \cdot e^{-5}$

(B) $1 - 6 \cdot e^{-3}$

(C) $1 - 6 \cdot e^{-5}$

(D) $1 - 5 \cdot e^{-3}$

(E) $1 - \left(1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right) \cdot e^{-3}$

Zadanie 7. Rozważmy klasyczny model Buhlmanna teorii wiarogodności (*credibility*).

Zmienne: $X_{j,i} \quad (j = 1, \dots, p), \quad (i = 1, \dots, n)$

oznaczają wartość szkód z j-tego kontraktu w i-tym roku, zaś Θ_j oznacza parametr strukturalny dla j-tego kontraktu. Niech $\hat{\mu}_j$ będzie taką liniową funkcją zmiennych $X_{j,i}$ (zawierającą stałą), która jest najlepszym nieobciążonym predyktorem zmiennej losowej $\mu(\Theta_j)$. To znaczy, że:

$(*) \quad E(\hat{\mu}_j - \mu(\Theta_j)) = 0$

oraz że $\hat{\mu}_j$ minimalizuje błąd średniokwadaratowy predykcji:

$(**) \quad E\left[(\hat{\mu}_j - \mu(\Theta_j))^2\right] = \min$

wśród funkcji liniowych spełniających warunek $(*)$.

Kowariancja predyktorów dla kontraktu nr 1 i kontraktu nr 2: $COV(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$, wyraża się wzorem:

(A) $\dfrac{s^2}{n} + \dfrac{s^2 \cdot a^2}{n \cdot a^2 + s^2}$

(B) $\dfrac{s^2}{n \cdot p} + \dfrac{n}{p} \cdot \dfrac{s^2 \cdot a^2}{n \cdot a^2 + s^2}$

(C) 0

(D) $\dfrac{s^2}{n \cdot p} + \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{s^2 \cdot a^2}{n \cdot a^2 + s^2}$

(E) $\dfrac{s^2}{n \cdot p}$

Model Buhlmanna*. Założenia i oznaczenia.*

$\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_p)$,

$\mu(\Theta_j) = E(X_{j,i} / \Theta), \qquad \sigma^2(\Theta_j) = VAR(X_{j,i} / \Theta)$,

$COV(X_{j,i}, X_{j,k} / \Theta) = 0$ dla $(i \neq k)$

$m = E(\mu(\Theta_j)), \qquad s^2 = E(\sigma^2(\Theta_j)), \qquad a^2 = VAR(\mu(\Theta_j))$,

$COV(\mu(\Theta_j), \mu(\Theta_k)) = 0$ dla $(j \neq k)$,

Zadanie 8. Wartość szkody jest zmienną losową X o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 12]$. Kontrakt ubezpieczeniowy jest opisany funkcją $I(x)$: jest to wysokość odszkodowania wypłacanego w przypadku wystąpienia szkody x.
Rozpatrujemy wszystkie kontrakty spełniające dwa warunki:

- $0 \le I(x) \le x$
- $E[I(X)] = 1.5$

Najmniejsza możliwa wartość $VAR[X - I(X)]$ wynosi:

(A) 1

(B) 3

(C) 3.75

(D) 4

(E) 12

Zadanie 9. Dla pięciu kontraktów ubezpieczeniowych, liczba szkód zaistniałych w ciągu trzech lat wyniosła:

Numer kontraktu j	1	2	3	4	5
Zaobs. liczba szkód N_j	1	2	0	2	0

Zakładamy, że liczba szkód N_j dla j-tego kontraktu jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym o parametrach $(3, \theta_j)$ - szkoda może wystąpić tylko raz w ciągu każdego z lat, z prawdopodobieństwem θ_j. *A priori* zakładamy, że $\theta_1, \dots, \theta_5$ są realizacjami niezależnych zmiennych losowych $\Theta_1, \dots, \Theta_5$ o jednakowym rozkładzie danym gęstością:

$$\pi(\theta) = \begin{cases} (a+1)\cdot(1-\theta)^a & \text{\textit{dla}} \quad \theta \in (0,1) \\ 0 & \text{\textit{w przeciwnym przypadku}} \end{cases}$$

Dobrano parametr a tak, że $E(\Theta_j) = \dfrac{5}{15}$.

Wartości $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5)$ estymatorów bayesowskich parametrów Θ_j postaci:

$\hat{\Theta}_j = E(\Theta_j | N_j)$

wynoszą:

(A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right)$

(B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(C) $\left(\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}\right)$

(D) $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0\right)$

(E) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Zadanie 10. Portfel ryzyk składa się z dwóch niezależnych podportfeli. Liczba szkód w podportfelu i $(i = 1, 2)$ jest zmienną losową N_i o rozkładzie Poissona(λ_i), zaś wysokość pojedynczej szkody wynosi b_i (w ramach danego podportfela jest to wartość nielosowa). Niech:
$\lambda_1 = 120$, $b_1 = 1$;
$\lambda_2 = 30$, $b_2 = 3$.
Wartość oczekiwana i wariancja z rozkładu warunkowego łącznej wartości szkód z całego portfela
- jeśli wiadomo, że $N_1 + N_2 = 200$ -
wynosi:

(A) wartość oczekiwana = 280; wariancja = 128

(B) wartość oczekiwana = 210; wariancja = 390

(C) wartość oczekiwana = 280; wariancja = 280

(D) wartość oczekiwana = 200; wariancja = 200

(E) wartość oczekiwana = 280; wariancja = 520

Egzamin dla Aktuariuszy z 24 listopada 1997 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	D	
4	C	
5	A	
6	B	
7	D	
8	C	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.