Zadanie 1.

Ryzyka X_1 i X_2 są niezależne i mają identyczny rozkład:
z atomami:

$$\Pr(X_1 = 0) = 0.7, \quad \text{i} \quad \Pr(X_1 = 1) = 0.1,$$

oraz gęstością: $f(x) = 0.4(1-x)$ dla $x \in (0,1)$

$\Pr(X_1 + X_2 > 1)$ wynosi:

$$P(X_1+X_2>1) = \sum P(X_1+X_2>1 \mid X_1=x)P(X_1=x) + \int P(X_1+X_2>1 \mid X_1=x) f_{X_1}(x)\,dx$$

- $P(X_1+X_2>1 \mid X_1=0)P(X_1=0) = P(X_2>1)P(X_1=0) = 0 \cdot 0.7 = 0$
- $P(X_1+X_2>1 \mid X_1=1)P(X_1=1) = P(X_2>0)P(X_1=1) = [1-P(X_2 \le 0)]P(X_1=1) =$
$= (1-0.7)\cdot 0.1 = 0.03$

Dla $x \in (0,1)$:

$$P(X_1+X_2>1) = \int_0^1 P(X_1+X_2>1 \mid X_1=x) f_X(x)\,dx = \int_0^1 P(X_2>1-x)\,0.4(1-x)\,dx =$$

$$P(X_2>1-x) = \int_{1-x}^1 0.4(1-x)\,dx + 0.1 = 0.4\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1-x}^1 + 0.1 =$$

$$= 0.4\left[1-\frac{1}{2}-(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right] + 0.1 = 0.4\left[1-\frac{1}{2}-1+x+\frac{1-2x+x^2}{2}\right]+0.1 =$$

$$= 0.4\left[-\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right]+0.1 = 0.2x^2+0.1$$

$$= \int_0^1 (0.2x^2+0.1)\,0.4(1-x)\,dx = 0.4\int_0^1 0.2x^2-0.2x^3+0.1-0.1x\,dx =$$

$$= 0.4\left[0.2\frac{x^3}{3} - 0.2\frac{x^4}{4} + 0.1x - 0.1\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 0.4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{2}{75}$$

Suma: $\frac{2}{75} + 0.03 = \frac{17}{300}$

Zadanie 2.

Zmienna losowa X jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o rozkładach złożonych Poisson z parametrami odpowiednio (λ_1, F_1), (λ_2, F_2), oraz (λ_3, F_3). Wartości parametrów częstotliwości $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oraz dystrybuanty F_1, F_2, F_3, dane są wzorami:

i	λ_i	$F_i(x)$ dla $x < 1$	$F_i(x)$ dla $x \in [1,2)$	$F_i(x)$ dla $x \geq 2$
1	3/2	0	7/10	1
2	1	0	8/10	1
3	1/2	0	3/10	1

Wobec tego $\Pr(X = 4)$ wynosi:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \quad , \quad F(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot F_i(x)$$

$$\lambda = \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 3$$

$$F(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{20} + \frac{8}{30} + \frac{1}{20} = \frac{2}{3}$$

Wzór Panjera gdy $N \sim P(\lambda)$:

$$P(X=0) = \exp(-\lambda)$$

$$P(X=k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda j}{k} P(Y=j) P(X=k-j)$$

$$P(Y=1) = \frac{2}{3}, \quad P(Y=2) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=3) = 0, \quad P(Y=4) = 0$$

$$P(X=0) = e^{-3}$$

$$P(X=1) = \frac{3 \cdot 1}{1} P(Y=1) P(X=0) = 3 \cdot \frac{2}{3} e^{-3} = 2e^{-3}$$

$$P(X=2) = \frac{3 \cdot 1}{2} P(Y=1) P(X=1) + \frac{3 \cdot 2}{2} P(Y=2) P(X=0) =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2e^{-3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-3} = 2e^{-3} + e^{-3} = 3e^{-3}$$

$$P(X=3) = \frac{3 \cdot 1}{3} P(Y=1) P(X=2) + \frac{3 \cdot 2}{3} P(Y=2) P(X=1) =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 3e^{-3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2e^{-3} = 2e^{-3} + \frac{4}{3} e^{-3} = \frac{10}{3} e^{-3}$$

$$P(X=4) = \frac{3 \cdot 1}{4} P(Y=1) P(X=3) + \frac{3 \cdot 2}{4} P(Y=2) P(X=2) =$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3} e^{-3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3e^{-3} = \frac{5}{3} e^{-3} + \frac{3}{2} e^{-3} = \frac{19}{6} e^{-3}$$

Zadanie 3.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$.
Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \ldots$.
Likwidacja n-tej szkody następuje w momencie $T_n + D_n$.
Załóżmy, że zmienne losowe $T_1, D_1, (T_2 - T_1), D_2, (T_3 - T_2), D_3, \ldots$:

- są niezależne,
- mają taki sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej ½.

Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód zlikwidowanych do momentu t. Wobec tego oczekiwana liczba szkód zlikwidowanych na odcinku czasu $1 < t \le 2$, a więc

$$E[N(2) - N(1)]$$

Wynosi:

Musimy policzyć $E[N(t)]$. Warunkujemy po całkowitej liczbie szkód, przy czym szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona:

$$E[N(t)] = \sum_k E[N(t) \mid N = k]\, P(N = k) = \sum_k E[N(t) \mid N = k] \cdot \frac{2^k}{k!} e^{-2}$$

Prawdopodobieństwo, że szkoda, która zdarzyła się w momencie $0 < t < 1$ zostanie zlikwidowana w ciągu tego samego roku wynosi:

$$P(t + D_1 < 1) = P(D_1 < 1 - t) = 1 - e^{2(t-1)}$$

Prawdopodobieństwo, że szkoda, która zdarzyła się w momencie $0 < t < 1$ zostanie zlikwidowana do końca przyszłego roku wynosi:

$$P(t + D_1 < 2) = P(D_1 < 2 - t) = 1 - e^{2(t-2)}$$

Załóżmy, że mamy k szkód, z których każda zdarzyła się w momencie $U(0,1)$ (losowanie niezależne). Niech $N(1)$ oznacza liczbę z tych k szkód, które zostały zlikwidowane do momentu $t = 1$:

$$E[N(1) \mid N = k] = k \int_0^1 1 - e^{2(t-1)}\, dt = \frac{1}{2} k \left(1 + \frac{1}{e^2}\right)$$

Niech $N(2)$ oznacza liczbę z tych k szkód, które zostały zlikwidowane do momentu $t = 2$:

$$E[N(2) \mid N=k] = k \int_0^2 \frac{1}{2}\left(1 - e^{2(t-2)}\right) dt = \frac{1}{4} k \left(3 + \frac{1}{e^4}\right)$$

Wracając do pierwszego równania obliczamy $E[N(1)]$ i $E[N(2)]$:

$$E[N(1)] = \sum_k \frac{1}{2} k \left(1 + \frac{1}{e^2}\right) \cdot \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right) \cdot E[Poiss(2)] = 1 + \frac{1}{e^2} \approx 1{,}135$$

$$E[N(2)] = \sum_k \frac{1}{4}\left(3 + \frac{1}{e^4}\right) \frac{2^k}{k!} e^{-2} = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{1}{e^4}\right) \cdot E[Poiss(4)] = 3 + \frac{1}{e^4} \approx 3{,}018$$

Oczekiwana liczba szkód zlikwidowana na odcinku czasu $1 < t \leq 2$:

$$E[N(2) - N(1)] = 3{,}018 - 1{,}135 = 1{,}883$$

Zadanie 4.

Kierowca, którego charakteryzuje wartość q parametru ryzyka Q, zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem q, zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem $p = 1 - q$, przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Rozkład parametru ryzyka Q w populacji kierowców jest na przedziale $(0, 1)$ dany gęstością:

$$f_Q(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 4-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, ląduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Ląduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Ląduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej;
- Ląduje w klasie czwartej, o ile w danym roku był w klasie trzeciej lub czwartej.

Wiadomo, że rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni klas dla dowolnego kierowcy w takim systemie bonus-malus stabilizuje się (przestaje zależeć od klasy startowej) po upływie kilku pierwszych lat. Oznaczmy przez p_3 wartość oczekiwaną udziału kierowców przebywających w klasie czwartej w całkowitej liczebności kierowców w tej populacji, po osiągnięciu ww. stabilizacji.

Przyjmijmy, że parametry $(\alpha, \beta) = (2, 8)$. Wobec tego p_3 wynosi:

Aby kierowca znalazł się w klasie trzeciej, musi zgłosić jedną szkodę i później przez dwa kolejne lata nie zgłosić szkody. Wiedząc to, możemy bardzo łatwo wyznaczyć wartość oczekiwaną udziału kierowców przebywających w klasie trzeciej:

$$p_3 = E[Q(1-Q)^2] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x(1-x)^2 \, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha, \beta+2) \cdot \int_0^\infty \frac{1}{B(\alpha, \beta+2)} \cdot x \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+2-1} \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta+2} = \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(2)\Gamma(8)} \cdot \frac{\Gamma(2)\Gamma(10)}{\Gamma(12)} \cdot \frac{2}{12} =$$

$$= \frac{9! \cdot 9!}{7! \cdot 11!} \cdot \frac{2}{12} = \frac{8 \cdot 9}{10 \cdot 11} \cdot \frac{2}{12} = \frac{6}{55}$$

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- proces liczący $N(t)$ oraz wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne, przy czym:
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- wartości poszczególnych szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1
- $c = (1+\theta)\cdot\lambda, \quad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

- $L := \sup_{t>0}\{u - U(t)\}$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

- $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_N, \qquad (L = 0 \text{ gdy } N = 0)$,

gdzie składnik l_1 jest zmienną określoną w przypadku, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równy jest wtedy:

- $l_1 = u - U(t_1)$, gdzie t_1 jest tym momentem czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Jeśli $\theta = 1/5$, oraz $u = 3$, to warunkowa wartość oczekiwana liczby takich spadków, pod warunkiem że nastąpiła ruina:

$$E(N | L > u)$$

wynosi:

$$E(N | L > u) = \frac{\theta+1}{\theta} + \frac{u}{\theta+1} = \frac{\frac{1}{5}+1}{\frac{1}{5}} + \frac{3}{\frac{1}{5}+1} = 8\frac{1}{2}$$

Zadanie 6.

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem częstotliwości λ, niezależną od zmiennych Y_i. Niech:

$$M = \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\} & gdy \quad N > 0 \\ 0 & gdy \quad N = 0 \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana $E(N|M)$ wynosi:

$$N \sim P(\lambda), \quad f_N(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$Y_i \sim U(0,1), \quad f_Y(y) = 1, \quad y \in (0,1)$$

$$F_Y(y) = y$$

$$F_M(m) = [F_Y(m)]^N = m^N$$

$$f_M(m) = N m^{N-1}, \quad m \in (0,1)$$

$$f_{N|M}(n|m) = c \cdot f_{M|N}(m|n) f_N(n) =$$

$$= c n m^{n-1} \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \mathbb{1}(0 < m < 1) \cdot \mathbb{1}(n = 0, 1, \ldots) \quad | n \neq 0 |$$

$$= c \cdot \frac{(\lambda m)^{n-1} e^{-\lambda m}}{(n-1)!} \cdot \mathbb{1}(n = 1, 2, \ldots)$$ – przesunięty rozkład Poissona z parametrem λm

Ostatecznie

$$\begin{cases} 1 + \lambda M, & gdy \quad M > 0 \\ 0, & gdy \quad M = 0 \end{cases}$$

Zadanie 7.

W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są niezależne.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0).$$

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c = 110\% \lambda \mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = \mathrm{E}(L) + 1.645\sqrt{var(L)}$ wynosi:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{1+\theta}, \quad R = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$$

p-stwo ruiny gdy wypłaty mają rozkład wykładniczy

$$\theta + 1 = \frac{c}{\lambda EY}$$

$$\theta + 1 = 1.1$$

$$R = \frac{\frac{1}{\mu} \cdot 0.1}{1.1} = \frac{1}{11\mu}$$

$$\Psi(u) = \frac{e^{-\frac{u}{11\mu}}}{1.1} = \frac{10}{11} e^{-\frac{u}{11\mu}}$$

$$F_L(u) = 1 - \frac{10}{11} e^{-\frac{u}{11\mu}}$$

$$EL = \int_0^\infty \frac{10}{11} e^{-\frac{u}{11\mu}} du = 10\mu \int_0^\infty \frac{1}{11\mu} e^{-\frac{u}{11\mu}} du = 10\mu$$

$$EL^2 = \int_0^\infty 2u \cdot \frac{10}{11} e^{-\frac{u}{11\mu}} du = 20\mu \int_0^\infty u \cdot \frac{1}{11\mu} e^{-\frac{u}{11\mu}} du =$$

$$= 20\mu \int_0^\infty u \left(-e^{-\frac{u}{11\mu}}\right)' du = -20\mu u e^{-\frac{u}{11\mu}} \Big|_0^\infty + 20\mu \cdot 11\mu \cdot \int_0^\infty \frac{1}{11\mu} e^{-\frac{u}{11\mu}} du =$$

$= 220\mu^2$

$$Var(L) = 220\mu^2 - 100\mu^2 = 120\mu^2$$

$$\sqrt{Var(L)} = 2\sqrt{30} \cdot \mu$$

$$u = \mu(10 + 1.645 \cdot 2\sqrt{30}) = 28{,}02\,\mu$$

$$\psi(28{,}02) = \frac{10}{11} e^{-\frac{28{,}02}{11}} = 7{,}1\,\%.$$

Zadanie 8.

Liczby szkód $N_1, \dots N_{10}, N_{11}$ w kolejnych latach są, dla ustalonej wartości parametru $Q = q$, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, q)$, a więc przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem q, zaś wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1-q)$. Niech $N = N_1 + \dots + N_{10}$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o gęstości na przedziale $(0,1)$ określonej wzorem:

- $f_Q(x) = 4 \cdot (1-x)^3$.

Warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $\mathrm{var}(N_{11} | N_1, \dots, N_{10}) > \mathrm{var}(N_{11})$

jest postaci:

$N_i | Q = q \sim Bin(1, q)$ $\quad Var(N_{11} | N_1, \dots, N_{10}) > Var(N_{11} | N_1 + \dots + N_{10})$

$f_Q(x) = 4(1-x)^3 \mathbb{1}_{(0,1)} \sim Beta(1, 4)$

$N = N_1 + \dots + N_{10} \sim Bin(10, q)$

$$Var(N_i) = Var(E[N_i | Q = q]) + E[Var(N_i | Q = q)] = Var(Q) + E[Q(1-Q)] =$$

$$= EQ^2 - (EQ)^2 + EQ - EQ^2 = EQ - (EQ)^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+\beta) - \alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} = \left| \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \end{matrix} \right| = \frac{4}{25}$$

$$Var(N_{11}) = \frac{4}{25}$$

$$Var(N_{11} | N) = Var(E[N_{11} | N, Q]) + E[Var(N_{11} | N, Q)] =$$

$$= Var(E[N_{11} | Q]) + E[Var(N_{11} | Q)] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$$

↑

Ponieważ jest warunkowa niezależność to:

$$P(Q | N) = \frac{P(N = n | Q = q) P_Q(q)}{P(N)} = C \cdot \binom{10}{n} q^n (1-q)^{10-n} 4(1-q)^3 =$$

$$= C q^n (1-q)^{13-n} \Rightarrow C = \frac{1}{B(n+1, 14-n)}$$

$$Var(N_{11} | N) = \frac{(n+1)(14-n)}{15^2}$$

$$\frac{(n+1)(14-n)}{15^2} > \frac{4}{25}$$

$$14n - n^2 + 14 - n > \frac{4 \cdot 15^2}{25}$$

$$-n^2 + 13n > \frac{4 \cdot 15^2}{25} - 14$$

$$n^2 - 13n + 22 < 0$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 22 = 81$$

$$n_1 = \frac{13-9}{2} = 2$$

$$n_2 = \frac{13+9}{2} = 11$$

$$N > 2$$

Zadanie 9.

W pewnej populacji każde ryzyko charakteryzuje się trzema parametrami q, b oraz v, o następującym znaczeniu:

- parametr q to prawdopodobieństwo, że do szkody dojdzie (może zajść co najwyżej jedna szkoda),
- jeśli już do szkody dojdzie, to rozkład jej wartości ma wartość oczekiwaną równą b i wariancję równą b^2v^2.

Parametr v^2 dla wszystkich ryzyk z populacji przyjmuje tę samą wartość równą $1/5$. Niejednorodność populacji znajduje wyraz w zróżnicowanych wartościach pozostałych dwóch parametrów. Wartości parametrów (q,b) losowo dobranego ryzyka z tej populacji to realizacja pary zmiennych losowych (Q,B), o której wiemy, że:

- $\mathrm{E}(Q) = 0.1$,
- $var(Q) = 0.01$,
- $var(B) = \frac{1}{4}[\mathrm{E}(B)]^2$,
- zmienne Q i B są niezależne.

Niech W_n oznacza łączną wartość szkód z portfela liczącego n ryzyk niezależnie wylosowanych z tej populacji. Liczba n, dla której zachodzi:

$$\frac{\sqrt{var(W_n)}}{\mathrm{E}(W_n)} = 0.1,$$

wynosi:

Ponieważ W_n to łączna wartość szkód z portfela liczącego n ryzyk niezależnie wylosowanych z tej populacji, to:

$W_n = X_1 + \ldots + X_n$,

gdzie $X_1, \ldots, X_n$ to pojedyncze ryzyka.

Jeżeli do szkody dojdzie, to:

$E(X_i \mid X_i > 0) = b$

$Var(X_i \mid X_i > 0) = b^2 v^2$

$E(X_i^2 \mid X_i > 0) = Var(X_i \mid X_i > 0) + [E(X_i \mid X_i > 0)]^2 = b^2 v^2 + b^2 = b^2(1+v^2)$

Dla $i = 1, \ldots, n$ zachodzi

$EX_i = E[E(X_i \mid Q, B)] = E(QB) = EQ\,EB = 0{,}1\,EB$

$Var(X_i) = Var[E(X_i \mid Q,B)] + E[Var(X_i \mid Q,B)] = Var(QB) + E[E(X_i^2 \mid Q,B) -$

$- (E(X_i \mid Q,B))^2] =$

$= EQ^2 EB^2 - (EQ)^2 (EB)^2 + \frac{6}{5} EQ\,EB^2 - EQ^2 EB^2 =$

$= \frac{6}{5} EQ\,EB^2 - (EQ)^2 (EB)^2$

Z treści zadania wiemy, że

$$Var(B) = \frac{1}{4}(EB)^2$$

A zatem:

$$EB^2 = Var(B) + (EB)^2 = \frac{1}{4}(EB)^2 + (EB)^2 = 1,25(EB)^2$$

Możemy teraz zapisać:

$$Var(X_i) = \frac{6}{5} EQ EB^2 - (EQ)^2 (EB)^2 = 1,2 \cdot 0,1 \cdot 1,25 (EB)^2 - 0,01 (EB)^2 = 0,14 (EB)^2$$

Wiemy, że

$$\frac{\sqrt{Var(W_n)}}{EW_n} = 0,1$$

Obliczamy n:

$$\frac{\sqrt{n \cdot 0,14 (EB)^2}}{n \cdot 0,1 EB} = 0.1$$

$$n = \frac{0,14}{0,1^4} = 1400$$

Zadanie 10.
Ubezpieczyciel prowadzi dwa portfele ubezpieczeń. W obu portfelach pojedyncze ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona z taką samą intensywnością λ. Portfele różnią się rozkładem wartości pojedynczej szkody i liczbą ryzyk w portfelu (n_1 i n_2 odpowiednio). Stosunkowy narzut na składkę netto dla ryzyk w obu portfelach jest ten sam i wynosi θ. W rezultacie parametry modelu są następujące:

- <u>1 portfel:</u>

intensywność łączna $n_1\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 2\exp(-2y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{2}(1+\theta)\lambda$;

- <u>2 portfel:</u>

intensywność łączna $n_2\lambda$, rozkład wartości pojedynczej szkody o gęstości $f(y) = 5\exp(-5y)$, składka za jedno ryzyko $\frac{1}{5}(1+\theta)\lambda$.

Jeśli wiemy, że funkcja prawdopodobieństwa ruiny ubezpieczyciela jest postaci:
$\Psi(u) = \frac{2}{3}\exp(-u) + \frac{1}{12}\exp\left(-\frac{5}{2}u\right), \quad u \geq 0,$
to wartości parametrów modelu $\left(\theta, \ \frac{n_1}{n_1+n_2}\right)$ wynoszą:

Mieszanina rozkładów wykładniczych (w klasycznym modelu teorii ruiny)

$$f_Y(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} w_i \beta_i \exp(-\beta_i x) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad p.p \end{cases}$$

Zakładamy, że

1) $\beta_M > \dots > \beta_2 > \beta_1 > 0,$

2) $w_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{M} w_i = 1$

Wówczas: $\Psi(u) = \sum_{i=1}^{M} a_i \exp(-r_i u),$

gdzie $r_1, r_2, \dots, r_M$ to M najmniejszych rozwiązań równania:

$$\sum_{i=1}^{M} w_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r} = 1 + (1+\theta) EY \cdot r$$

Rozwiązanie

<u>1 portfel</u>

$f(y) = 2\exp(-2y)$

<u>2 portfel</u>

$f(y) = 5\exp(-5y)$

$\Psi(u) = \frac{2}{3} \exp(-u) + \frac{1}{12} \exp(-\frac{5}{2} u), \quad u \geq 0$

Czyli:

$\beta_1 = 2$

$\beta_2 = 5$

$r_1 = 1$

$r_2 = \frac{5}{2}$

$EY = \omega_1 EY_1 + \omega_2 EY_2 = \omega_1 \cdot \frac{1}{2} + \omega_2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \omega_1 + \frac{1}{5}$

Rozwiązujemy układ równań dla $r = r_1$ i $r = r_2$

$r_1 = 1$

$$\omega_1 \cdot \frac{2}{2-1} + (1-\omega_1) \frac{5}{5-1} = 1 + (1+\theta)\left(\frac{3}{10}\omega_1 + \frac{1}{5}\right)$$

$r_2 = \frac{5}{2}$

$$\omega_1 \cdot \frac{2}{2-\frac{5}{2}} + (1-\omega_1) \frac{5}{5-\frac{5}{2}} = 1 + (1+\theta) \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{10}\omega_1 + \frac{1}{5}\right)$$

Otrzymujemy:

$\omega_1 = \frac{1}{21}$

$\theta = \frac{1}{3}$ Odp. C

DRUGA METODA

Wzorek (przypadek zerowej nadwyżki początkowej)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\theta = \frac{1}{3}$$

$$w_1 \cdot \frac{2}{2-1} + (1-w_1)\frac{5}{5-1} = 1 + \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{10}w_1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$2w_1 + \frac{5}{4}(1-w_1) = 1 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{10}w_1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$2w_1 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}w_1 = 1 + \frac{2}{5}w_1 + \frac{4}{15}$$

$$\frac{7}{20}w_1 = \frac{1}{60}$$

$$w_1 = \frac{1}{21}$$

Zauważmy, że $\frac{n_1}{n_1+n_2} + \frac{n_2}{n_1+n_2} = 1$ oraz, że wartości $\frac{n_1}{n_1+n_2}$ i $\frac{n_2}{n_1+n_2}$ określają ilościowy skład portfela. Zatem te dwa portfele tworzą portfel, w którym wartość pojedynczej szkody jest dana gęstością będącą mieszanką gęstości rozkładów wyjściowych, tzn. ma gęstość daną wzorem:

$$f(y) = w_1\beta_1 \exp(-\beta_1 y) + w_2\beta_2\exp(-\beta_2 y),$$

gdzie $w_1 = \frac{n_1}{n_1+n_2}$, $w_2 = \frac{n_2}{n_1+n_2}$.