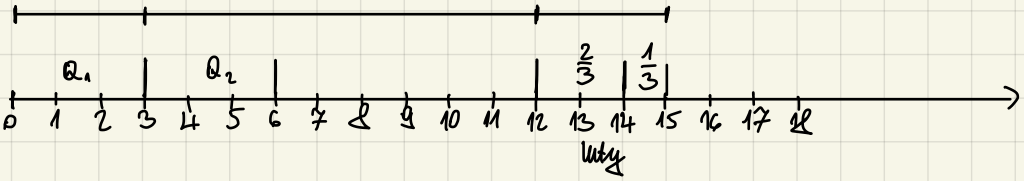
Zadanie 1.
W tabeli poniżej znajdują się dane o wartości składki przypisanej w pewnej grupie ubezpieczeń, w styczniu i lutym roku 2022 łącznie oraz w każdym z kolejnych kwartałów roku 2021. W grupie tej mamy wyłącznie polisy 12-miesięczne. Zakładamy, że sprzedaż wewnątrz każdego z wyróżnionych podokresów przebiega równomiernie. Zakładamy także, że ryzyko szkód w cyklu ważności każdej polisy rozkłada się równomiernie. Zakładamy dla uproszczenia, że każdy miesiąc liczy tyle samo dni.

Rok	2021				2022
podokres	Q1	Q2	Q3	Q4	Sty+luty
Składka przypisana	27 mln	30 mln	27 mln	30 mln	21 mln

Rezerwa składki wyliczona na koniec lutego na podstawie tych danych i przyjętych założeń i uproszczeń wynosi:

Spójrzmy na polisy kupione w Q1 2021: $X \sim U(0,1)$ - moment kupna



Interesuje nas ryzyko na koniec lutego 2022 więc polisy zakupione w Q1 2021 mogą generować szkody jeszcze przez marzec 2022 stąd pozostałe ryzyko na koniec lutego 2022: $\max(0, X-\frac{2}{3})/4$. Wartość oczekiwana:

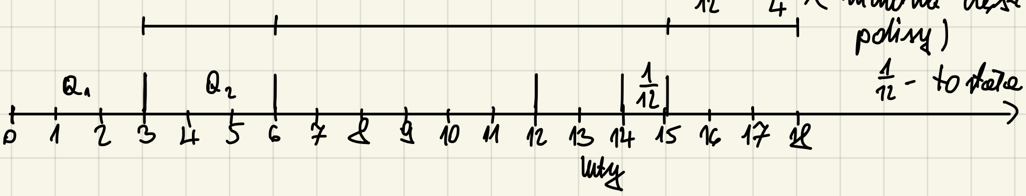
$$E(\max(0, X-\tfrac{2}{3})/4) = \frac{1}{4}\int_{\frac{2}{3}}^{1} x - \frac{2}{3}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{72}$$

Jak więc wkład w rezerwę to $27 \text{ mln} \cdot \frac{1}{72} = 0.375$ mln

Spójrzmy na polisy kupione w Q2 2021: $X \sim U(0,1)$ - moment kupna

$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow$ (ruchoma część roku w której były kupowane polisy)



$\frac{1}{12}$ - to stała część bez względu na to kiedy polisy były kupione

$X=q$, to na koniec lutego 2022 pozostałe ryzyko wynosi tyle ile zostało od końca lutego 2022 do momentu q w Q2 2022, czyli $q/4 + \frac{1}{12}$

czyli kontrybucja z Q2 2021 do rezerwy na koniec lutego 2022, to:

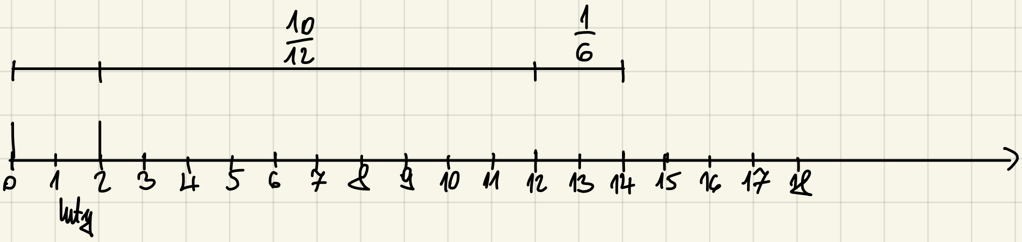
$$E\left[\frac{X}{4}+\frac{1}{12}\right]\cdot 30\,\text{mln} = \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)30\,\text{mln} = 6.25\,\text{mln}$$

Dla Q3 i Q4 jest analogicznie:

Q3 2021: $E\left[\frac{X}{4}+\frac{4}{12}\right]\cdot 27\,\text{mln} = 12.375\,\text{mln}$

Q4 2021: $E\left[\frac{X}{4}+\frac{7}{12}\right]\cdot 30\,\text{mln} = 21.25\,\text{mln}$

Sty - lut 2022:



$$E\left[\frac{X}{6}+\frac{10}{12}\right]\cdot 21\,\text{mln} = 19.25\,\text{mln}$$

Suma: $0.375 + 6.25 + 12.375 + 19.25 = 59.5$

Zadanie 2.

Oznaczmy przez N liczbę wszystkich szkód które wydarzyły się w ciągu roku, zaś przez K liczbę tych spośród nich, które zostały zgłoszone jeszcze przed końcem tego roku. Niech $M_1, M_2, M_3 \ldots$ oznaczają zmienne sygnalizujące zgłoszenie przed końcem roku (wartością jeden) lub zgłoszenie po zakończeniu roku (wartością zero) kolejnych szkód. Mamy więc:

- $K = M_1 + M_2 + \ldots + M_N$.

Zakładamy przy tym, że $N, M_1, M_2, M_3, \ldots$ są niezależne, oraz że:

- N ma rozkład dwumianowy o parametrach (n, q),
- $M_1, M_2, M_3, \ldots$ mają taki sam rozkład dwumianowy o parametrach $(1, Q)$.

Przy założeniu, że $n = 20$, $q = 1/5$, oraz $Q = 1/2$, warunkowa wartość oczekiwana liczby wszystkich szkód, pod warunkiem że liczba szkód zgłoszonych w ciągu roku wyniosła 4, a więc $\mathrm{E}(N|K = 4)$, wynosi:

$$N \sim B\left(20, \tfrac{1}{5}\right)$$

$$M_i \sim B\left(1, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$K \sim B\left(N, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$P(N|K) = \frac{P(K|N=k)\,P(N=k)}{P(K)}$$

gdy dajemy $N=k$ to mamy na sztywno k
teraz mamy k prób i chcemy prawd. że $K=4$

$$P(N|K=4) = c \cdot P(N=k)\,P(K=4|N=k) = \binom{20}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k} \binom{k}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Czyli z dokładnością do stałej rozkład warunkowy ma postać:

$$P(N=k, K=4) = C \cdot \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^k \binom{k}{4} = C\binom{16}{k-4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^k = \left|\begin{matrix}\text{przesunięcie}\\ \text{o } 4\end{matrix}\right| = c'\binom{16}{k-4}\left(\frac{1}{8}\right)^{k-4}$$

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

$$p^{k-4}\, q^{16-(k-4)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{k-4} q^{16} = c''\left(\frac{p}{q}\right)^{k-4}$$

$$\frac{p}{1-p} = \frac{1}{8} \Rightarrow 1-p = 8p \Rightarrow p = \frac{1}{9}$$

Jeśli dostaliśmy gęstość rozkładu dwumianowego to stała c' musi być równa $c' = 1$.

Czyli rozkład warunkowy to przesunięty o 4 rozkład dwumianowy $B\left(16, \frac{1}{9}\right)$

Jego wartość oczekiwana to $16 \cdot \frac{1}{9}$ co po cofnięciu przesunięcia daje:

$$E[N|K=4] = 4 + \frac{16}{9} = \frac{52}{9}$$

Zadanie 3.

W procesie zgłaszania i likwidacji szkód każdą szkodę charakteryzuje para zmiennych $(T,\ D)$, gdzie T oznacza moment zgłoszenia szkody, zaś $(T+D)$ moment jej likwidacji.

Rozważmy szkodę, której moment zgłoszenia ma rozkład jednostajny na odcinku czasu $(0, 4)$. Załóżmy iż czas likwidacji (a więc zmienna D) jest od momentu zgłoszenia niezależny i ma rozkład czteropunktowy, w którym każda z wartości $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ pojawia się z takim samym prawdopodobieństwem równym ¼.

Warunkowa wartość oczekiwana czasu likwidacji szkody, pod warunkiem że szkoda w momencie czasu $t = 4$ ma status szkody zgłoszonej oczekującej na likwidację, a więc:

- $E(D|T+D>4)$,

wynosi:

$E(D|T+D>4) = ?$

$T \sim U(0,4)$

$D \sim$

d	1	2	3	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Niech $k \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$p_k = P(D=k \mid T+D>4) = c \cdot P(T+D>4 \mid D=k)\, P(D=k) =$$
$$= c\, P(T>4-k)\, P(D=k) = c\left(1 - P(T<4-k)\right) P(D=k) =$$
$$= c\left(1 - \frac{4-k}{4}\right) P(D=k) = c \cdot \frac{1}{4} k\, P(D=k) = ck\, P(D=k)$$

$p_1 = 1 \cdot c,\ p_2 = 2 \cdot c,\ p_3 = 3 \cdot c,\ p_4 = 4 \cdot c \Rightarrow p_k = ck$

Rozkład musi sumować się do 1, stąd:

$1 = c(1+2+3+4)$

$c = \frac{1}{10}$

$p_k = \frac{k}{10}$

$$E(\cdot) = \sum_{k=1}^{4} \frac{k^2}{10} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{9}{10} + \frac{16}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

Zadanie 4.

Zmienne X_0 oraz X_1 oznaczają łączną wartość szkód z pewnej grupy ryzyk w dwóch kolejnych latach. Zmienne te są (przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ) zmiennymi losowymi warunkowo niezależnymi, o rozkładach złożonych Poissona z taką samą oczekiwaną liczbą szkód λ i takim samym rozkładem wartości pojedynczej szkody Y, o charakterystykach:

- $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$, $\mathrm{var}(Y) = \sigma_Y^2$.

Parametr ryzyka Λ ma rozkład, o którym wiemy, że:

- $\mathrm{E}(\Lambda) = \mu_\Lambda$, $\mathrm{var}(\Lambda) = \sigma_\Lambda^2$.

Rozważamy predykcję X_1 opartą na zaobserwowanej liczbie szkód N_0 oraz łącznej ich wartości X_0 z poprzedniego roku. Zakładamy przy tym, że znamy wartości parametrów μ_Y, σ_Y^2, μ_Λ oraz σ_Λ^2.

Wśród liniowych nieobciążonych predyktorów postaci:

- $LUP(X_1|N_0, X_0) = X_0 \cdot z_X + N_0 \cdot \mu_Y \cdot z_N + \mu_\Lambda \cdot \mu_Y \cdot (1 - z_X - z_N)$,

poszukujemy predyktora najlepszego (*BLUP*), dobierając współczynniki z_N oraz z_X tak, aby zminimalizować błąd średniokwadratowy predykcji:

- $E\{[X_1 - LUP(X_1|N_0, X_0)]^2\}$.

Optymalna wartość z_X^* współczynnika z_X dana jest wzorem:

$$[X_1 - LUP(X_1|N_0, X_0)]^2 = [X_1 - (X_0 z_X + N_0 \mu_Y z_N + \mu_\Lambda \mu_Y (1 - z_X - z_N))]^2 =$$

$$= X_1^2 - 2X_0 X_1 z_X - 2X_1 N_0 \mu_Y z_N - 2X_1 \mu_\Lambda \mu_Y (1 - z_X - z_N) +$$

$$+ X_0^2 z_X^2 + N_0^2 \mu_Y^2 z_N^2 + 2N_0 \mu_Y z_N \mu_\Lambda \mu_Y (1 - z_X - z_N) +$$

$$+ \mu_\Lambda^2 \mu_Y^2 (1 - z_X - z_N)^2 + 2X_0 z_X N_0 \mu_Y z_N + 2X_0 z_X \mu_\Lambda \mu_Y (1 - z_X - z_N)$$

Współczynniki przy wyrazach:

wyraz wolny: $X_1^2 - 2X_1 \mu_\Lambda \mu_Y + \mu_\Lambda^2 \mu_Y^2$

z_X : $-2X_0 X_1 + 2X_1 \mu_\Lambda \mu_Y - 2\mu_\Lambda^2 \mu_Y^2 + 2X_0 \mu_\Lambda \mu_Y$

z_X^2 : $X_0^2 + \mu_\Lambda^2 \mu_Y^2 - 2X_0 \mu_\Lambda \mu_Y$

z_N : $-2X_1 N_0 \mu_Y + 2X_1 \mu_\Lambda \mu_Y + 2N_0 \mu_Y^2 \mu_\Lambda - 2\mu_\Lambda^2 \mu_Y^2$

z_N^2 : $N_0^2 \mu_Y^2 - 2N_0 \mu_Y^2 \mu_\Lambda + \mu_\Lambda^2 \mu_Y^2$

$z_X z_N$: $-2N_0 \mu_\Lambda \mu_Y^2 + 2\mu_\Lambda^2 \mu_Y^2 + 2X_0 N_0 \mu - 2X_0 \mu_\Lambda \mu_Y$

$EX_0 = EX_1 = \mu_\Lambda \mu_Y$

$$EX_0^2 = EX_1^2 = E[E(X_0^2|\Lambda)] = E(\Lambda(\sigma_Y^2+\mu_Y^2) + \Lambda^2\mu_Y^2) =$$
$$= (\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_\Lambda + \mu_Y^2(\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2)$$

$$E(X_0X_1) = E[E(X_0X_1|\Lambda)] = E[E(X_0|\Lambda)E(X_1|\Lambda)] = E(\mu_Y\Lambda\cdot\mu_Y\Lambda) =$$
$$= \mu_Y^2(\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2)$$

$$E(X_1N_0) = E[E(X_1N_0|\Lambda)] = E[E(X_1|\Lambda)E(N_0|\Lambda)] = E(\mu_Y\Lambda\cdot\Lambda) =$$
$$= \mu_Y(\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2)$$

$$E(N_0) = E[E(N_0|\Lambda)] = E\Lambda = \mu_\Lambda$$

$$E(N_0^2) = E[E(N_0^2|\Lambda)] = E(\Lambda+\Lambda^2) = \mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2$$

$$E(X_0N_0) = E[E(X_0N_0|N_0)] = E(N_0^2\mu_Y) = \mu_Y(\mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2)$$

Wartości oczekiwane współczynników

$$E(\text{wyraz wolny}) = (\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_\Lambda + \mu_Y^2(\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2) - 2\mu_\Lambda^2\mu_Y^2 + \mu_\Lambda^2\mu_Y^2 =$$
$$= (\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_\Lambda + \mu_Y^2\sigma_\Lambda^2$$

$$E(z_X) = -2\mu_Y^2(\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2) + 2\mu_\Lambda^2\mu_Y^2 - 2\mu_\Lambda^2\mu_Y^2 + 2\mu_\Lambda^2\mu_Y^2 = -2\mu_Y^2\sigma_\Lambda^2$$

$$E(z_X^2) = (\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_\Lambda + \mu_Y^2(\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2) + \mu_\Lambda^2\mu_Y^2) - 2\mu_\Lambda^2\mu_Y^2 =$$
$$= (\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_\Lambda + \mu_Y^2\sigma_\Lambda^2$$

$$E(z_N) = -2\mu_Y^2(\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2) + 2\mu_\Lambda^2\mu_Y^2 + 2\mu_Y^2\mu_\Lambda^2 - 2\mu_Y^2\mu_\Lambda^2 = -2\mu_Y^2\sigma_\Lambda^2$$

$$E(z_N^2) = \mu_Y^2(\mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2) - 2\mu_Y^2\mu_\Lambda^2 + \mu_\Lambda\mu_Y^2 = \mu_Y(\mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2)$$

$$E(z_N z_X) = -2\mu_Y^2\mu_\Lambda^2 + 2\mu_Y^2\mu_\Lambda^2 + 2\mu_Y^2(\mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2+\mu_\Lambda^2) - 2\mu_Y^2\mu_\Lambda^2 =$$
$$= 2\mu_Y^2(\mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2)$$

$$E[X_1 - LUP(X_1|N_0,X_0)]^2 = f(z_N,z_X) =$$
$$= [(\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_\Lambda + \mu_Y^2\sigma_\Lambda^2]z_X^2 + \mu_Y^2(\mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2)z_N^2 - 2\mu_Y^2\sigma_\Lambda^2 z_X -$$
$$- 2\mu_Y^2\sigma_\Lambda^2 z_N + 2\mu_Y^2(\mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2)z_X z_N + (\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_\Lambda + \mu_Y^2\sigma_\Lambda^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z_X} = 2[(\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_\Lambda + \mu_Y^2\sigma_\Lambda^2]z_X - 2\mu_Y^2\sigma_\Lambda^2 + 2\mu_Y^2(\mu_\Lambda+\sigma_\Lambda^2)z_N = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta z_N} = 2\mu_Y^2(\mu_1+\sigma_1^2)z_N - 2\mu_Y^2\sigma_1^2 + 2\mu_Y^2(\mu_1+\sigma_1^2)z_X = 0$$

Odejmujemy stronami :

$$2[(\sigma_Y^2+\mu_Y^2)\mu_1 + \mu_Y^2\sigma_1^2 - \mu_Y^2(\mu_1+\sigma_1^2)]z_X = 0$$

$$2\sigma_Y^2\mu_1 z_X = 0$$

$$z_X = 0$$

Zadanie 5.

Dany jest ciąg liczb $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ z przedziału $(0,1)$. Rozważmy dwie zmienne losowe:

- Y - o rozkładzie dwumianowym i parametrach $(n, \bar{q})$, gdzie $\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$
- Z - której warunkowy rozkład (przy danej wartości q zmiennej losowej Q) jest rozkładem dwumianowym z parametrami (n, q), zaś zmienna Q ma rozkład n-punktowy taki, że $\Pr(Q = q_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1,2,...,n$

Wariancje tych dwóch zmiennych związane są równością:

$$var(Z) = var(Y) + a\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2$$

Stała a występująca w tej równości wynosi:

$$Var(Z) - Var(Y) = a \sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2$$

$$Var(Z) = Var(E[Z|Q]) + E[Var(Z|Q)]$$

$$Z|Q \sim Bin(n, q)$$

$$Var(Z|Q) = nQ(1-Q)$$

$$E[Var(Z|Q)] = E[nQ(1-Q)] = nEQ - nE[Q^2]$$

$$E[Z|Q] = nQ$$

$$Var(E[Z|Q]) = Var(nQ) = n^2 Var(Q) = n^2 E[Q^2] - n^2(EQ)^2$$

Czyli:

$$Var(Z) = nEQ - nE[Q^2] + n^2E[Q^2] - n^2(EQ)^2$$

$$Var(Y) = n\bar{q}(1-\bar{q}) = nEQ(1-EQ)$$

$$Var(Z) - Var(Y) = nEQ - nE[Q^2] + n^2E[Q^2] - n^2(EQ)^2 - nEQ(1-EQ) =$$

$$= \cancel{nEQ} - nE[Q^2] + n^2E[Q^2] - n^2(EQ)^2 - \cancel{nEQ} + n(EQ)^2 =$$

$$= -nE[Q^2] + n^2E[Q^2] - n^2(EQ)^2 + n(EQ)^2 =$$

$$= (n^2 - n)E[Q^2] - (n^2-n)(EQ)^2 =$$

$$= (n^2-n)(E[Q^2] - (EQ)^2) = (n^2-n)Var(Q) =$$

$$= n(n-1)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n}(q_i-\bar{q})^2$$

$$a = n - 1$$

Zadanie 6. Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową: $U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0,10]) = 1$,
- $E(Y_1) = 4$.

Wiemy też, że $c > 4\lambda$.

Przy tych założeniach warunkowy rozkład deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) nie jest dokładnie znany. Daje się jednak określić zbiór wszystkich możliwych wartości, jakie może przyjąć wartość oczekiwana tego rozkładu. Ten zbiór to przedział:

$$EL_1^k = \frac{EY^{k+1}}{(k+1)\,EY}$$

$$EL_1 = \frac{EY^2}{2 \cdot EY} = \frac{EY^2}{8}$$

MIN:

$$EY^2 = (EY)^2 + Var(Y) = (EY)^2 = 4^2 = 16$$

$$\min EL_1 = \frac{16}{8} = 2$$

MAX:

$$0 \cdot p + 10(1-p) = 4$$

$$1-p = \frac{4}{10}$$

$$p = \frac{3}{5}$$

$$EY^2 = \frac{3}{5} \cdot 0^2 + \frac{2}{5} \cdot 10^2 = 40$$

$$\max EL_1 = \frac{40}{8} = 5$$

$$EL_1 \in (2, 5)$$

Odp. B

WYPROWADZENIE

[Ogólny fakt] ze wzoru podanego w roz. rozd. 5/83 wynika, iż pstwo, że spadek poniżej wartości początkowej nastąpi kiedykolwiek wynosi:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}(1-F(y))\,dy$$

Wartość oczekiwana deficytu pod warunkiem, że nastąpi ruina (czyli równoważnie spadek poniżej poziomu początkowego, bo $u_0=0$) jest równa:

$$\frac{\int x f_X(x)\,dx}{\int f_X(x)\,dx}$$ [bo dzielimy przez pstwo zajścia warunku, o którym mowa w zadaniu]

$$\frac{\int_0^\infty \frac{\lambda}{c} t(1-F(t))\,dt}{\int_0^\infty \frac{\lambda}{c}(1-F(t))\,dt} = \frac{\int_0^\infty t(1-F(t))\,dt}{\int_0^\infty 1-F(t)\,dt} =$$

[Ogólny fakt: jeśli zm. los. X ma wartości nieujemne i dys. $F(t)$, to
$E(X^k) = \int_0^\infty k t^{k-1}(1-F(t))\,dt$]

$$= \frac{\frac{1}{2}EY^2}{EY} =$$

[pytamy jakie są możliwe wartości powyższego wyrażenia dla zm. Y
o której wiemy, że $EY=4$, $P(Y\in[0,10])=1$.]

$$= \frac{\frac{1}{2}Var(Y)+\frac{1}{2}(EY)^2}{EY} = \left[EY=4\right] = \frac{1}{8}Var(Y)+2$$

Więc pytanie: jakie są możliwe wartości $Var(Y)$?

$Var(Y)\geq 0$, no i $Var(Y)=0$ jest możliwa.

Największa możliwa wariancja będzie w tym przypadku, gdy Y przyjmuje tylko wartości 0 i 10.

Niech $p_0 = P(Y=0)$, $p_{10} = P(Y=10)$, wiemy, że $EY = 4$, więc:

$p_{10} = \frac{4}{10}$ cyli $p_0 = \frac{6}{10}$.

Stąd $Var(Y) = (0-4)^2 \cdot \frac{6}{10} + (10-4)^2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{96}{10} + \frac{144}{10} = 24$

Minimalna wartość oczekiwana to $\frac{1}{8} \cdot 0 + 2 = 2$

Maksymalna wartość oczekiwana to $\frac{1}{8} \cdot 24 + 2 = 5$

Czyli wynik to $[2, 5]$.

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa
- ct to suma składek zgromadzonych do momentu t,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ to łączna wartość szkód zaszłych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$.
- $c = (1+\theta) \cdot \lambda \cdot \mathrm{E}(Y_1), \quad \theta > 0$

Wiadomo, że zmienna losowa:

$$L := \sup_{t>0} \{u - U(t)\}$$

daje się przedstawić jako zmienna o rozkładzie złożonym:

$$L = l_1 + l_2 + \ldots + l_N, \qquad (L = 0 \text{ gdy } N = 0),$$

gdzie l_1 jest zmienną określoną, gdy nadwyżka spadnie poniżej u, i równa jest wtedy:

$$l_1 = u - U(t_1),$$

gdzie t_1 to moment czasu, kiedy po raz pierwszy do takiego spadku doszło.

Wiadomo, że jeśli doszło do ruiny, wtedy istnieje taka liczba $K \in \{1, 2, \ldots, N\}$ że:

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_K > u \qquad \text{oraz} \qquad l_1 + l_2 + \ldots + l_{K-1} \le u$$

Innymi słowy, K oznacza kolejny numer tego spadku, przy którym nastąpiła ruina.

Jeśli $\theta = 1/5$, oraz $u = 2$, oraz jeśli wiadomo, że ruina nastąpiła przy czwartym spadku, to oczekiwana liczba spadków pod tymi warunkami:

$$\mathrm{E}(N | L > u, K = 4)$$

wynosi:

Wzór: $\mathrm{E}(N | L > u, K = k) = \frac{1}{\theta} + k$

$\mathrm{E}(N | L > u, K = 4) = 5 + 4 = 9$

Odp. A

Zadanie 8.

Przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ kierowca zgłasza szkody w liczbie N o łącznej wartości X. Łączna wartość szkód X ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód równą λ oraz oczekiwaną wartością pojedynczej szkody równą $(10 + \lambda)$.

Parametr ryzyka Λ w populacji kierowców ma rozkład Gamma (2,10) o wartości oczekiwanej 0.2 i wariancji 0.02.
Z populacji losujemy niezależnie n kierowców, którzy zgłaszają odpowiednio liczbę i łączną wartość szkód: $(N_1, X_1), (N_2, X_2), \ldots, (N_n, X_n)$.

Zmienną losową $\bar{Y}_n$ równą:

- $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{N_1+N_2+\cdots+N_n}$ jeśli $N_1 + N_2 + \cdots + N_n > 0$, lub:
- zero jeśli $N_1 + N_2 + \cdots + N_n = 0$

interpretujemy jako średnią wartość zaobserwowanej szkody. Granica stochastyczna tej zmiennej gdy $n \to \infty$ wynosi:

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{N_1+N_2+\ldots+N_n} = \frac{\frac{X_1}{N_1}\cdot N_1 + \frac{X_2}{N_2}\cdot N_2 + \ldots + \frac{X_n}{N_n}\cdot N_n}{N_1+N_2+\ldots+N_n} \longrightarrow ?$$

$$\frac{\frac{X_1}{N_1}\cdot N_1 + \ldots + \frac{X_n}{N_n}\cdot N_n}{n} \longrightarrow E\left(\frac{X_i}{N_i}\cdot N_i\right)$$ z mocnego prawa wielkich liczb

$$E\left(\frac{X_i}{N_i}\cdot N_i\right) = ?$$

war. oczek. poj. szkody

oczek. l. szkód

$$E\left(\frac{X_i}{N_i}\cdot N_i \mid \Lambda=\lambda\right) = E\left(\frac{X_i}{N_i} \mid \Lambda=\lambda\right) E(N_i \mid \Lambda=\lambda) = (10+\lambda)\lambda$$

$$E\left(\frac{X_i}{N_i}\cdot N_i\right) = E\left[E\left(\frac{X_i}{N_i} N_i \mid \Lambda=\lambda\right)\right] = E\left[(10+\Lambda)\Lambda\right] = E(10\Lambda+\Lambda^2) =$$

$$= 10\,E(\Lambda) + E(\Lambda^2) = 10\cdot 0.2 + 0.06 = 2.06$$

| rozkład $\Gamma(\alpha,\beta)$: $EX^k = \frac{1}{\beta^k}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$ |

$$\frac{N_1+N_2+\ldots+N_n}{n} \longrightarrow EN_i$$

$$E(N_i \mid \Lambda=\lambda) = \lambda$$

$$E(N_i) = E\left[E(N_i \mid \Lambda=\lambda)\right] = E\Lambda = 0.2$$

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{N_1+N_2+\ldots+N_n} \longrightarrow \frac{2.06}{0.2} = 10.3$$

Zadanie 9.

Liczby szkód $N_1,...N_{10}, N_{11}$ w kolejnych latach są warunkowo (przy ustalonej wartości q parametru Q), niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwumianowym z parametrami $(1, q)$, a więc przyjmują wartość 1 z prawdopodobieństwem q, zaś wartość 0 z prawdopodobieństwem $(1-q)$. Parametr ryzyka Q jest zmienną losową o gęstości na przedziale $(0,1)$ określonej wzorem:

- $f_Q(x) = 4\cdot(1-x)^3$.

Niech $N = N_1 + ... + N_{10}$ oznacza liczbę szkód które wydarzyły się w ciągu pierwszych dziesięciu lat. Warunek konieczny i wystarczający na to, aby zachodziła nierówność:

- $\operatorname{var}(N_{11} | N_1,..., N_{10}) > \operatorname{var}(N_{11})$

jest postaci:

$N_i | Q = q \sim Bin(1, q)$ $\qquad$ $Var(N_{11} | N_1, ..., N_{10}) > Var(N_{11} | N_1 + ... + N_{10})$

$f_Q(x) = 4(1-x)^3 \mathbb{1}_{(0,1)} \sim Beta(1, 4)$

$N = N_1 + ... + N_{10} \sim Bin(10, q)$

$$Var(N_i) = Var(E[N_i | Q=q]) + E[Var(N_i | Q=q)] = Var(Q) + E[Q(1-Q)] =$$
$$= EQ^2 - (EQ)^2 + EQ - EQ^2 = EQ - (EQ)^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} =$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+\beta) - \alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta - \alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} = \left| \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \end{matrix} \right| = \frac{4}{25}$$

$$Var(N_{11}) = \frac{4}{25}$$

$$Var(N_{11} | N) = Var(E[N_{11} | N, Q]) + E[Var(N_{11} | N, Q)] =$$
$$= Var(E[N_{11} | Q]) + E[Var(N_{11} | Q)] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$$

↑

Ponieważ jest warunkowa niezależność to:

$$P(Q|N) = \frac{P(N=n | Q=q)\, P_Q(q)}{P(N)} = C \cdot \binom{10}{n} q^n (1-q)^{10-n}\, 4(1-q)^3 =$$
$$= C\, q^n (1-q)^{13-n} \implies C = \frac{1}{B(n+1, 14-n)}$$

$$Var(N_{11} | N) = \frac{(n+1)(14-n)}{15^2}$$

$$\frac{(n+1)(14-n)}{15^2} > \frac{4}{25}$$

$$14n - n^2 + 14 - n > \frac{4 \cdot 15^2}{25}$$

$$-n^2 + 13n > \frac{4 \cdot 15^2}{25} - 14$$

$$n^2 - 13n + 22 < 0$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 22 = 81$$

$$n_1 = \frac{13-9}{2} = 2$$

$$n_2 = \frac{13+9}{2} = 11$$

$$N > 2$$

Zadanie 10. Niech łączna wartość szkód:

- $W = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$

ma złożony rozkład Poissona. Momenty rozkładu wartości pojedynczej szkody wynoszą:

- $\mathrm{E}(Y_1) = 1/3$,
- $\mathrm{E}[(Y_1)^2] = 1/3$.

Wiemy także, że momenty nadwyżki wartości pojedynczej szkody ponad udział własny w wysokości 1 wynoszą:

- $\mathrm{E}[(Y_1 - 1)_+] = 1/24$,
- $\mathrm{E}\{[(Y_1 - 1)_+]^2\} = 1/12$.

Niech teraz W_U oznacza łączna wartość szkód uciętych do wysokości udziału własnego wynoszącego dla każdej szkody 1, a więc:

- $W_U = \min\{Y_1, 1\} + \min\{Y_2, 1\} + \ldots + \min\{Y_N, 1\}$;

Wobec tego kwadrat współczynnika zmienności zmiennej W_U, a więc:

$$\frac{var(W_U)}{[\mathrm{E}(W_U)]^2}$$

Wynosi:

W_U - złożony rozkład Poissona z rozkładem poj. szkody X takim

jak $\min(Y,1)$

$Var(W_U) =$ | wariancja złożonego rozkładu Poissona | $= \lambda(Var(X) + (EX)^2) = \lambda EX^2$

$E(W_U) =$ | war. oczekiwana złożonego rozkładu Poissona | $= \lambda EX$

Czyli mamy :

$$\frac{Var(W_U)}{(E(W_U))^2} = \frac{\lambda EX^2}{\lambda^2 (EX)^2} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{EX^2}{(EX)^2}$$

$$EX = E[\min(Y,1)] = E(1 \cdot \mathbb{1}_{Y \geq 1} + Y \cdot \mathbb{1}_{Y<1}) = E(1 \cdot \mathbb{1}_{Y\geq 1}) + EY - E(Y \cdot \mathbb{1}_{Y \geq 1}) =$$

$$= EY - E[(Y-1) \cdot \mathbb{1}_{Y \geq 1}] = EY - E[(Y-1)_+]$$

$$EX = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$$

Dla dowolnej zm. los. $Y \geq 0$ zachodzi :

$$Y = (Y-k)_+ + \min(Y,k)$$

$$EY^2 = E[(Y-k)_+^2 + 2(Y-k)_+ \cdot \min(Y,k) + \min(Y,k)^2]$$

$$= E[(Y-k)_+^2] + 2E[(Y-k)_+ \cdot \min(Y,k)] + E[\min(Y,k)^2]$$

$$(Y-k)_+ \cdot \min(Y,k) = (Y-k)\cdot k \cdot \mathbb{1}_{Y>k} = k(Y-k)_+$$

więc:

$$EY^2 = E[(Y-k)_+^2] + 2k\,E[(Y-k)_+] + E[\min(Y,k)^2]$$

$$E[\min(Y,k)^2] = EY^2 - E[(Y-k)_+^2] - 2k\,E[(Y-k)_+]$$

$$E[\min(Y,1)^2] = EY^2 - E[(Y-1)_+^2] - 2\,E[(Y-1)_+] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - 2\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{Var(W_U)}{(E(W_U))^2} = \frac{1}{EN}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{96}{49\,EN}$$