

### Zadanie 1.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$$U_n = u + X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ma przyrosty niezależne o tym samym rozkładzie:

$$\Pr(X_1 = 1) = q,$$

$$\Pr(X_1 = -1) = p,$$

$$\Pr(X_1 = 0) = 1 - p - q,$$

a jego parametry spełniają założenia:

$$0 < p < q,$$

$$p + q \leq 1, \text{ oraz}$$

$$u = 0.$$

Przy tych założeniach prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu dane jest wzorem:

Powtarzając rozumowanie z red. 1/22 dostajemy, że  $P(\text{trajektoria znajdzie się w stanie 2 lub poniżej stanu początkowego}) = P(\text{trajektoria znajdzie się w stanie 1 lub poniżej stanu początkowego})^2$

Napiszmy równanie z p-twem całkowitym tak jak w poprzednim zadaniu (namalujemy po możliwych ruchach pierwszego kroku)

$$P(\text{trajektoria znajdzie 1 krok poniżej stanu początkowego}) = q \cdot P(\text{trajektoria znajdzie 2 kroki w dół poniżej stanu początkowego}) + p \cdot 1 + (1 - p - q) \cdot P(\text{trajektoria znajdzie 1 krok poniżej stanu początkowego})$$

czyli

$$t = q t^2 + p + (1 - p - q) t$$

$$q t^2 - (p + q) t + p = 0 \quad |: q$$

$$t^2 - \frac{p+q}{q} t + \frac{p}{q} = 0$$

$$\Delta = \frac{(p+q)^2}{q^2} - \frac{4pq}{q^2} = \frac{(q-p)^2}{q^2}$$

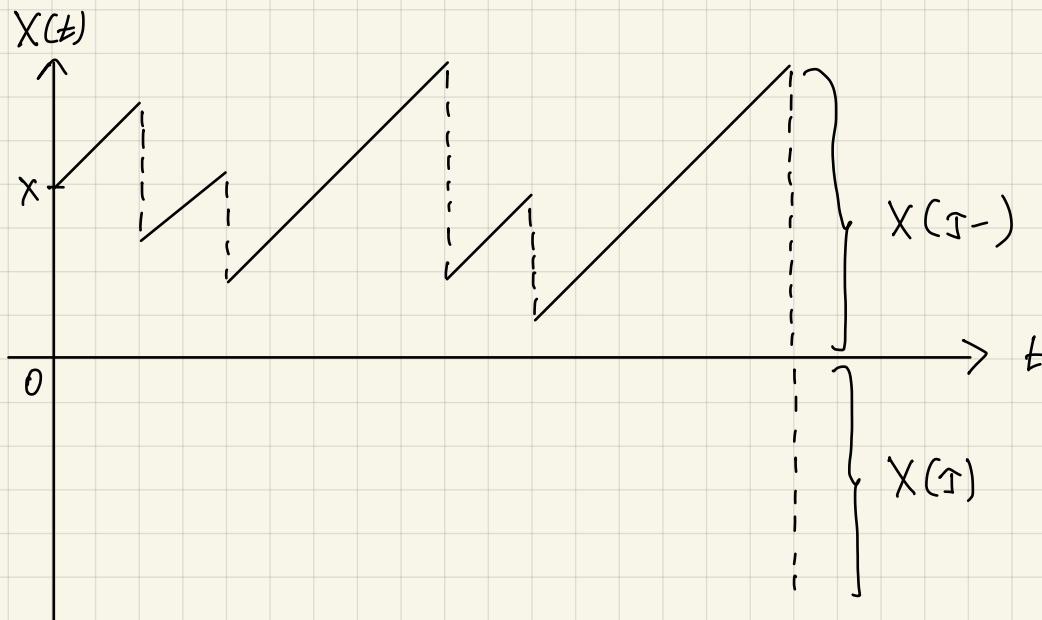
$$\sqrt{\Delta} = \frac{q-p}{q}$$

$$t = \frac{\frac{p+q}{q} \pm \frac{q-p}{q}}{2}$$

Ponieważ  $q > p$  to ułamek zachodzi ze skrajnym  $p$ -stwem, więc szukamy rozwiązania równe 1.

Stąd wynik to  $\frac{p}{q}$

Model z czasem ciągłym (Cramera - Lundberga)



#### Zadanie 4.

Każde ryzyko z pewnej populacji ryzyk generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności  $\lambda$ . Zróżnicowanie wartości parametru  $\lambda$  w populacji dane jest gęstością:

$$f(x) = x \cdot \exp(-x)$$

Niech  $T(t)$  oznacza chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie  $t$  dla losowo wybranego z tej populacji ryzyka.

Wobec tego  $E\{T(0) | T(0) > 1\}$  wynosi:

$$E[T(0) | T(0) > 1] = E[E(T(0) | T(0) > 1, \lambda = \lambda) | T(0) > 1]$$

$$\lambda \sim \Gamma(2, 1)$$

$$T(0) \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$E[T(0) | T(0) > 1, \lambda = \lambda] = \frac{\int_1^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}$$

$$\int_1^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_1^{\infty} \lambda x \left( \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right)' dx = \left[ -x e^{-\lambda x} + \int_1^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right]_1^{\infty} =$$

$$= \left[ -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_1^{\infty} = e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_1^{\infty} = e^{-\lambda}$$

$$E[T(0) | T(0) > 1, \lambda = \lambda] = 1 + \frac{1}{\lambda}$$

$$E\left[1 - \frac{1}{\lambda} \mid T(0) > 1\right] = ?$$

$$\begin{aligned} f_{\lambda | T(0) > 1}(\lambda) &= \frac{P(T(0) > 1 | \lambda = \lambda) f_{\lambda}(\lambda)}{P(T(0) > 1)} = c \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda e^{-\lambda} = c \cdot \lambda \cdot e^{-2\lambda} = \\ &= c \cdot \lambda^{2-1} e^{-2\lambda} \Rightarrow c = \frac{2^2}{\Gamma(2)} = 4 \sim \Gamma(2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[1 - \frac{1}{\lambda} \mid T(0) > 1\right] &= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot 4 \lambda e^{-2\lambda} d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} 4 \lambda e^{-2\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} 4 e^{-2\lambda} d\lambda = 4 \cdot \frac{\Gamma(2)}{2^2} - 4 \cdot \frac{\Gamma(1)}{2^1} = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

### Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki:

$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$ , gdzie:

- $ct$  jest sumą składek zgromadzonych do momentu  $t$ ,
- $N(t)$  jest procesem Poissona z parametrem intensywności  $\lambda$ ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  jest sumą wartości  $n$  pierwszych szkód
- wartości szkód  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  są i.i.d, niezależne od procesu  $N(t)$

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład jednostajny na odcinku  $(0, 10)$ .

- zaś nadwyżka początkowa i parametr intensywności składki, oraz parametr intensywności procesu pojawiania się szkód wynoszą:
- $u = 5, c = 25/4, \lambda = 1$ .

Prawdopodobieństwo, że do ruiny dojdzie w pierwszym z tych momentów czasu, kiedy nadwyżka spadnie poniżej wartości początkowej, wynosi:

W myśleniu modelu Lundberga pólno, że nadwyżka spadnie poniżej poziomu początkowego  $u$  i będzie w przedziale  $(u-y, u-y-dy)$  gdy zdana się to pierwszy raz jest równe:

$$\frac{\lambda}{c} \cdot (1 - P(y)) dy,$$

gdzie:  $c$  - intensywność składki

$\lambda$  - intensywność procesu liczby szkód

$P(u)$  - dystrybuanta wysokości pojedynczej szkody

UWAGA - powyższa funkcja nie odnosi się do jednostki (pomiaru spadku poniżej poziomu początkowego może w ogóle nie wystąpić - patrz rozwiązanie zad. 6/25).

W sytuacjach gdy chodzi o p-śtwo warunkowe pod warunkiem wystąpienia deficytu trzeba podzielić przez odpowiedni czynnik (jak w 6/25).

Pólno, że w pierwszym momencie spadku poniżej  $u$  nastąpi ruina jest równe pólno, że deficyt będzie  $\geq$  kapitałowi początkowemu, czyli  $u=5$ .

Wartość pojedynczej szkody jest  $U(0, 10)$ , więc  $P(y) = \min(\frac{y}{10}, 1) \cdot \mathbb{I}(y \geq 0)$

Szukane pólno:

$$\rho = \int_5^{\infty} \frac{\lambda}{c} (1 - P(y)) dy = \int_5^{10} \frac{\lambda}{c} (1 - \frac{y}{10}) dy = \frac{\lambda}{c} \int_5^{10} 1 - \frac{y}{10} dy =$$

$$= \frac{\lambda}{c} \left( 4 - \frac{4^2}{20} \right) \Big|_5^{10} = \frac{\lambda}{c} \left( 10 - \frac{100}{20} - 5 + \frac{25}{20} \right) = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{5}{4} = 1 \cdot \frac{\cancel{4}}{25} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} =$$

$$= \frac{1}{5}$$

**Zadanie 6.**

Czas, jaki upływa od zajścia każdej szkody do jej likwidacji jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej jeden rok, niezależnie od tego, kiedy do zajścia szkody doszło.

Liczba szkód zaszłych przed końcem roku 2020, i do tego momentu nie zlikwidowanych wynosi 150. Oczekiwana liczba szkód które zajdą na odcinku czasu  $(2020, 2020 + t)$ , gdzie  $t \in (0, 1)$ , wynosi:

$$E\{N(2020 + t) - N(2020)\} = 250t + 50t^2$$

Wobec tego oczekiwana liczba szkód zaszłych a nie zlikwidowanych na koniec roku 2021 wynosi:

$$S(t) = E[N(2020+t) - N(2020)] = 250t + 50t^2$$

$$T \sim \text{Exp}(1)$$

$$P(T > t) = e^{-t}$$

$$S'(t) = 250 + 100t$$

$$150 P(T > 1) + \int_0^1 S'(t) P(T > 1-t) dt = 150e^{-1} + \int_0^1 (250 + 100t) e^{-1+t} dt =$$

$$= 150e^{-1} + e^{-1} \int_0^1 (250 + 100t) e^t dt =$$

$$= 150e^{-1} + e^{-1} \left[ 250 \int_0^1 e^t dt + 100 \int_0^1 t e^t dt \right] =$$

$$\left[ \int_0^1 t e^t dt = \int_0^1 t (e^t)' dt = \left[ t e^t - \int_0^1 e^t dt \right]'_0 = \right. \\ \left. = \left[ t e^t - e^t \right]_0^1 = e - e - 0 + 1 = 1 \right]$$

$$= 150e^{-1} + e^{-1} (250e - 250 + 100) = 150e^{-1} + 250 - 150e^{-1} = 250$$

### Zadanie 7.

Liczba szkód w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu równa jest:

$$N = M_1 + \dots + M_K, \text{ gdzie:}$$

- $K, M_1, M_2, M_3, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś  $M_1, M_2, M_3, \dots$  mają identyczny rozkład prawdopodobieństwa
- $K$  oznacza liczbę wypadków, i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej  $\lambda$ ,
- $M_i$  jest liczbą szkód z  $i$ -tego wypadku, i ma rozkład określony na liczbach naturalnych (bez zera).

O rozkładzie liczby szkód z jednego wypadku wiemy, że:

$$\Pr(M_1 = 1) = p, \Pr(M_1 > 1) = 1 - p.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe iż w danym roku doszło jedynie do jednego wypadku pod warunkiem, iż wystąpiła więcej niż jedna szkoda:

$$\Pr(K = 1 | N > 1)$$

przy założeniach liczbowych:

$$\lambda = \frac{1}{10},$$

$$p = \frac{4}{5}$$

wynosi w przybliżeniu:

$$P(K=1 | N>1) = \frac{P(N>1 | K=1) P(K=1)}{P(N>1)}$$

$$P(N>1 | K=1) = P(M_1 > 1) = 1-p$$

$$P(K=1) = \lambda e^{-\lambda}$$

Dla  $i > 1$ :  $P(N>1 | K=i) = 1$  (jeżeli  $i > 1$  to oznacza, że nastąpiły co najmniej dwa wypadki więc p-stwo szkody  $> 1$  wynosi 1)

$$\begin{aligned} P(N>1) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(N>1 | K=i) P(K=i) = (1-p) P(K=1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(K=i) = \\ &= (1-p) \lambda e^{-\lambda} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = (1-p) \lambda e^{-\lambda} + (1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

$$P(K=1 | N>1) = \frac{(1-p) \lambda e^{-\lambda}}{(1-p) \lambda e^{-\lambda} + (1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})} \approx 0.2$$

### Zadanie 9.

Ubezpieczeni są losowo dobrani z populacji, w której:

- łączna wartość szkód dla ubezpieczonego charakteryzującego się wartością  $\lambda$  parametru  $\Lambda$  ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód  $N$  równą  $\lambda$ ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych, a jego wartość oczekiwana wynosi  $\mu$ ,
- parametr  $\Lambda$  ma rozkład Gamma (2,4) o wartości oczekiwanej  $1/2$  i wariancji  $1/8$ .

Ubezpieczyciel sprzedaje członkom tej populacji ubezpieczenie w zamian za składkę płaconą z góry w wysokości:

- $120\% \cdot \mu \cdot E(\Lambda | N > 0)$ ,

a na koniec roku tym ubezpieczonym, którzy nie zgłosili żadnej szkody, **wypłaca bonus** w wysokości:

- $120\% \cdot \mu \cdot \{E(\Lambda | N > 0) - E(\Lambda | N = 0)\}$ .

$$E(\Lambda | N > 0) = \int_0^{\infty} \lambda f_{\Lambda | N > 0}(\lambda) d\lambda$$

$$f_{\Lambda | N > 0}(\lambda) = \frac{P(N > 0 | \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda)}{P(N > 0)} = \underset{\text{musi całkowat nie do 1}}{C \cdot (1 - e^{-\lambda}) \cdot \lambda e^{-4\lambda}} \Rightarrow C = \frac{400}{9}$$

$$E(\Lambda | N > 0) = \int_0^{\infty} \frac{400}{9} \lambda^2 e^{-4\lambda} (1 - e^{-\lambda}) d\lambda = \frac{61}{90}$$

$$E(\Lambda | N = 0) = \int_0^{\infty} \lambda f_{\Lambda | N = 0}(\lambda) d\lambda$$

$$f_{\Lambda | N = 0}(\lambda) = \frac{P(N = 0 | \Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda)}{P(N = 0)} = C \cdot e^{-\lambda} \lambda e^{-4\lambda} = C \cdot \lambda e^{-5\lambda} \Rightarrow C = 25$$

$$E(\Lambda | N = 0) = \int_0^{\infty} 25 \lambda^2 e^{-5\lambda} d\lambda = 25 \cdot \frac{\Gamma(3)}{5^3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{bonus} = 1.2 \mu \left( \frac{61}{90} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \mu$$



### Zadanie 8.

Niech  $N_1$  oraz  $N_2$  oznaczają liczbę szkód wygenerowaną przez ubezpieczonego w latach 1 oraz 2, odpowiednio, zaś  $N = N_1 + N_2$  niech oznacza ich sumę. Rozkład warunkowy zmiennych  $N_1$  oraz  $N_2$  jest postaci:

$$\Pr(N_1 = m, N_2 = n | Q = q) = q^{m+n} (1-q)^{2-m-n},$$

gdzie  $m$  oraz  $n$  mogą wynieść tylko zero lub jeden.

Rozkład parametru ryzyka  $Q$  w populacji takich ubezpieczonych, określony na przedziale  $(0, 1)$ , jest nam nieznany. Wiemy jednak, że:

$$\Pr(N = 0) = 0.74, \quad \Pr(N = 1) = 0.12, \quad \Pr(N = 2) = 0.14.$$

Wobec tego  $\text{var}(Q)$  wynosi:

$$P(N_1 = m, N_2 = n | Q = q) = q^{m+n} (1-q)^{2-m-n}$$

$$P(N = x | Q = q) = q^x (1-q)^{2-x},$$

gdzie  $m$  i  $n$  mogą wynosić tylko 0 lub 1, a  $x \in \{0, 1, 2\}$ .

$$P(N = x | Q = q) = \binom{2}{x} q^x (1-q)^{2-x}$$



chyba błąd w zadaniu bo p-stwo nie sumuje się do 1, trzeba dodać ten składnik

$$\begin{aligned} P(N=0) &= \int P(N=0 | Q=q) f_Q(q) dq = \int (1-q)^2 f_Q(q) dq = \\ &= \int f_Q(q) dq - 2 \int q f_Q(q) dq + \int q^2 f_Q(q) dq = \\ &= 1 - 2EQ + EQ^2 = 0.74 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N=1) &= \int P(N=1 | Q=q) f_Q(q) dq = \int 2q(1-q) f_Q(q) dq = \\ &= 2 \int q f_Q(q) dq - 2 \int q^2 f_Q(q) dq = 2(EQ - EQ^2) = 0.12 \end{aligned}$$

$$P(N=2) = \int P(N=2 | Q=q) f_Q(q) dq = \int q^2 f_Q(q) dq = EQ^2 = 0.14$$

$$\begin{cases} 1 - 2EQ + EQ^2 = 0.74 \\ 2EQ - 2EQ^2 = 0.12 \\ EQ^2 = 0.14 \end{cases} \quad \begin{cases} EQ = \frac{0.12 + 2 \cdot 0.14}{2} = 0.2 \\ EQ^2 = 0.14 \end{cases}$$

$$\text{Var}(Q) = 0.14 - 0.04 = 0.1$$

### Zadanie 10.

Niech  $\theta$  będzie dodatnią liczbą rzeczywistą.

Rozważmy parę zmiennych losowych  $T_\theta$  i  $D$ , oznaczających odpowiednio:

- $T_\theta$  - moment czasu, w którym zaszła szkoda,
- $D$  - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do jej likwidacji.

Jednostką pomiaru czasu jest jeden rok.

Założmy, że  $T_\theta$  oraz  $D$  są niezależne, przy czym:

- $T_\theta$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $(0, \theta)$
- $D$  ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej jeden.

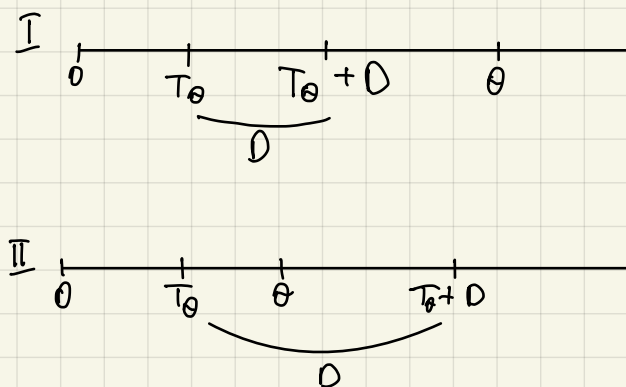
Sumę  $(T_\theta + D)$  interpretujemy jako moment czasu, w którym zlikwidowano szkodę.

Warunkową wartość oczekiwaną  $E(D | T_\theta + D > \theta)$  interpretujemy jako oczekiwany odstęp w czasie pomiędzy momentem zajścia a momentem likwidacji szkody, pod warunkiem iż szkoda, do której doszło na odcinku czasu  $(0, \theta)$ , do końca tego odcinka czasu zachowała status szkody niezlikwidowanej.

Granica:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} E(D | T_\theta + D > \theta)$$

wynosi:



$D$  - czas jaki upływa od momentu zajścia szkody do jej likwidacji

$$f_{D | T_\theta + D > \theta}(t) = \frac{P(T_\theta + D > \theta | D = t) f_D(t)}{P(T_\theta + D > \theta)} = \frac{P(T_\theta > \theta - t) f_D(t)}{\int_0^\infty P(T_\theta > \theta - t) f_D(t) dt}$$

Dla  $t < \theta$ :

$$f_{D | T_\theta + D > \theta}(t) = \frac{(1 - P(T_\theta < \theta - t)) f_D(t)}{\int_0^\infty (1 - P(T_\theta < \theta - t)) f_D(t) dt} = \frac{\frac{t}{\theta} e^{-t}}{\int_0^\theta \frac{t}{\theta} e^{-t} dt + \int_\theta^\infty e^{-t} dt} =$$

$$= \frac{\frac{t}{\theta} e^{-t}}{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} e^{-\theta}}, \quad t < \theta$$

Dla  $t > \theta$ :

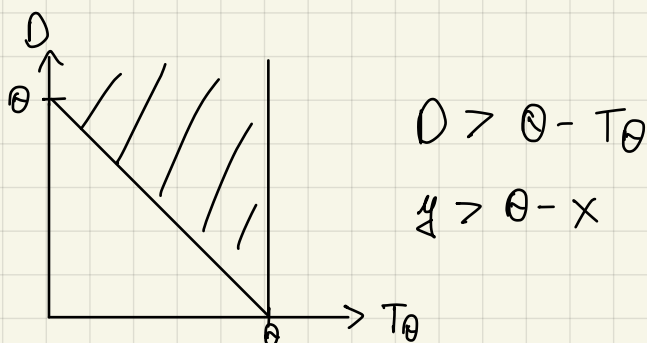
$$f_{D|T_0+D>\theta}(t) = \frac{e^{-t}}{\int_0^{\theta} \frac{t}{\theta} e^{-t} dt + \int_{\theta}^{\infty} e^{-t} dt} = \frac{e^{-t}}{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} e^{-\theta}}, \quad t > \theta$$

$$E(D|T_0+D>\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\frac{t^2}{\theta} e^{-t}}{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} e^{-\theta}} dt + \int_{\theta}^{\infty} \frac{t e^{-t}}{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} e^{-\theta}} dt =$$

$$\left[ \begin{aligned} \int_0^{\theta} t^2 (-e^{-t})' dt &= \left[ -t^2 e^{-t} + \int_0^{\theta} 2t (-e^{-t})' dt \right]_0^{\theta} = \\ &= \left[ -t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} + \int_0^{\theta} 2e^{-t} dt \right]_0^{\theta} = \left[ -t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} - 2e^{-t} \right]_0^{\theta} = \\ &= -\theta^2 e^{-\theta} - 2\theta e^{-\theta} - 2e^{-\theta} + 2 \\ \int_{\theta}^{\infty} t (-e^{-t})' dt &= \left[ -t e^{-t} - e^{-t} \right]_{\theta}^{\infty} = \theta e^{-\theta} + e^{-\theta} \end{aligned} \right]$$

$$E(D|T_0+D>\theta) = \underbrace{\frac{2 - \theta^2 e^{-\theta} - 2\theta e^{-\theta} - 2e^{-\theta}}{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} e^{-\theta}}}_{2 \text{ gdy } \theta \rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{\theta e^{-\theta} + e^{-\theta}}{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} e^{-\theta}}}_{0 \text{ gdy } \theta \rightarrow \infty}$$

II sposób



$$E(D | T_0 + D > \theta) = \frac{\int_0^\theta \int_{\theta-x}^\infty y \frac{1}{\theta} e^{-y} dy dx}{\int_0^\theta \int_{\theta-x}^\infty \frac{1}{\theta} e^{-y} dy dx}$$

$$L = \int_0^\theta \int_{\theta-x}^\infty y \frac{1}{\theta} e^{-y} dy dx = \frac{2}{\theta} - \frac{2}{\theta} e^{-\theta} - e^{-\theta}$$

$$M = \int_0^\theta \int_{\theta-x}^\infty \frac{1}{\theta} e^{-y} dy dx = \frac{1}{\theta} (1 - e^{-\theta})$$

$$\frac{L}{M} = \frac{\frac{1}{\theta} (2 - 2e^{-\theta} - \theta e^{-\theta})}{\frac{1}{\theta} (1 - e^{-\theta})} \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 2$$