Zadanie 1.

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 1.5, składka roczna wynosi 1, a łączna wartość szkód w każdym roku z prawdopodobieństwem sześć dziesiątych wynosi 0 i z prawdopodobieństwem cztery dziesiąte wynosi 2 (niezależnie od łącznej wartości szkód w innych latach). Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

$u(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0$

$S(t) = \sum_{i=1}^{t} W_i \qquad u(T_h) = -0.5$

Współczynnik dopasowania: $M_W(r) = \exp(cr)$

$0.4e^{2r} + 0.6e^{0 \cdot r} = e^{cr}$

$0.4e^{2r} + 0.6 - e^{r} = 0$

$e^{r} = x$

$0.4x^2 - x + 0.6 = 0$

$x^2 - 2.5x + 1.5 = 0$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1.5 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{r} = 1 \\ e^{r} = 1.5 \end{cases} \quad \begin{cases} r = 0 \\ r = \ln(1.5) \end{cases}$ Współczynnik dopasowania to rozwiązanie > 0

$$\Psi_h(u) = \frac{e^{-ru}}{E[e^{-r u(T_h)} \mid T_h < \infty]} = \frac{e^{-\ln(1.5) \cdot 1.5}}{e^{-\ln(1.5)(-0.5)}} = \frac{4}{9}$$

SPOSÓB II

Idziemy $+1$ z p-stwem $\frac{6}{10}$

Idziemy -1 z p-stwem $\frac{4}{10}$

$u = 1.5$

Trzeba policzyć p-stwo, że kiedykolwiek zejdziemy poniżej 0 (czyli dojścia do -0.5)

Kluczowa obserwacja

Niech $P(u)$ - p-stwo zejścia poniżej 0 ze stanu początkowego u

$P(n+1) = P($dojście poniżej zera z $n+1) =$

$= P($dojście poniżej zera z $n+1$ i „dojście poniżej n z $n+1$") $=$

$= [P(A \cap B) = P(A|B)P(B)] \cdot$

$\cdot P($dojście poniżej zera z $n+1 \,|\,$ dojście poniżej n z $n+1) \cdot$

$\cdot P($dojście do stanu n z $n+1) =$

$= P($dojście poniżej zera z $n) P($dojście do n z $n+1) =$

$= P($dojście poniżej zera z $n) P($znalezienia się o 1 krok poniżej stanu początkowego$) =$

$= P(n) P(0.5)$

Wniosek: $P(n+0.5) = P(0.5)^{n+1}$ [zamiast 0.5 może być (po obu stronach inna) dowolna liczba z przedziału $(0,1)$]

Czyli trzeba policzyć dla sytuacji w zadaniu ile wynosi $P(0.5)$

Wykonujemy pierwszy krok:

- Jeżeli jest to krok w dół ($p = \frac{4}{10}$), to nasza trajektoria należy do zbioru trajektorii na których zachodzi ruina.
- Jeżeli jest to krok w górę ($p = \frac{6}{10}$), to p-stwo, że w rozważanej trajektorii nastąpi ruina to jest $P(1.5) = P(0.5)^2$

Czyli ze wzoru na p-stwo całkowite (zbiór trajektorii na których zachodzi ruina rozbijamy na dwa przypadki w zależności od tego, czy pierwszy krok jest w dół czy w górę)

$$P(0.5) = \frac{4}{10} \cdot 1 + \frac{6}{10} \cdot P(0.5)^2$$

Czyli $p = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \cdot p^2$

$p = \frac{2}{3}$ (trzeba wybrać pierwiastek, który nie jest 1 - ogólna teoria mówi, że jeżeli p-stwo pójścia w górę jest większe niż pójścia w dół, to ruina zachodzi z p-stwem < 1 - w przeciwnym wypadku p-stwo miny jest równe 1)

Ostateczna odpowiedź to $P(1.5) = P(0.5)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Zadanie 2.

Zmienna losowa N ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami $(r, q) = \left(8, \frac{2}{3}\right)$,

tzn.: $\Pr(N = k) = \dfrac{\Gamma(8+k)}{\Gamma(8)k!}\left(\dfrac{1}{3}\right)^8\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$, $\quad k = 0,1,2,...$

Niech k^* oznacza taką liczbę naturalną, że:

$k^* = \inf\{k: \quad \Pr(N = k) \geq \Pr(N = k+1)\}$

Liczba k^* wynosi:

$P(N = k) \geqslant P(N = k+1$

$$\frac{\Gamma(8+k)}{\cancel{\Gamma(8)}k!} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^8}\left(\frac{2}{3}\right)^k \geqslant \frac{\Gamma(8+k+1)}{\cancel{\Gamma(8)}(k+1)!} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^8}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

$$\frac{\cancel{\Gamma(8+k)}}{\cancel{k!}} \cdot \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^k} \geqslant \frac{(8+k)\cancel{\Gamma(8+k)}}{\cancel{k!}(k+1)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^k}$$

$k+1 \geqslant (8+k)\frac{2}{3}$

$3k+3 \geqslant 16+2k$

$k \geqslant 13$

Zadanie 3

Wartość oczekiwana szkód X z ryzyka jest funkcją parametru Θ który charakteryzuje podmiot na to ryzyko narażony, i wynosi $E(X|\Theta) = \Theta$. Rozkład parametru Θ w populacji dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Theta(\theta) = 2\{\exp(-\theta) - \exp(-2\theta)\}$

Ubezpieczyciel nie rozróżnia ryzyk lepszych od gorszych, ustalić więc musi składkę równą dla wszystkich. Musi się jednak liczyć ze skutkami negatywnej selekcji. Oznaczmy przez:

- U zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeśli podmiot nabędzie ubezpieczenie, zaś 0 jeśli nie nabędzie;
- Π składkę zaoferowaną przez ubezpieczyciela.

Załóżmy, że negatywna selekcja przejawia się w tym, że:

- $\Pr(U = 1|\Theta = \theta) = 1 - \exp\left(-\frac{2\theta}{\Pi}\right)$ dla $\theta > 0$

Jeśli ubezpieczyciel ustalił składkę na poziomie $\Pi = 2$, to oczekiwana wartość szkód dla przeciętnego podmiotu (spośród tych podmiotów które zawrą ubezpieczenie), a więc:

$E(X|U = 1)$,

wyniesie:

$$E(X|U=1) = E[E(X|\theta) \mid U=1] = \int_0^\infty E(X|\theta)\, f_{\theta|U=1}(\theta)$$

$$f_{\theta|U=1}(\theta) = \frac{P(U=1|\theta=\theta)\, f_\theta(\theta)}{P(U=1)} = \underbrace{C \cdot (1-e^{-\theta})(e^{-\theta} - e^{-2\theta})}_{\text{musi całkować się do 1}} \Rightarrow C = 3$$

$$E(X|U=1) = \int_0^\infty 3\theta(1-e^{-\theta})(e^{-\theta} - e^{-2\theta})\, d\theta = \frac{11}{6}$$

Zadanie 4.

Liczba szkód N z ubezpieczenia AC przy danej wartości λ parametru Λ charakteryzującej kierowcę ma rozkład Poissona:

$$\Pr(N=k|\Lambda=\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda), \quad k=0,1,2,\dots .$$

Rozkład parametru Λ w populacji kierowców dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda)=81\cdot\lambda\cdot\exp(-9\lambda)$

Ubezpieczenie AC jest jednak dobrowolne. Niech:

- U oznacza zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeśli kierowca nabędzie ubezpieczenie, zaś 0 jeśli nie nabędzie;

Załóżmy, że:

- $\Pr(U=0|\Lambda=\lambda)=\exp(-2\lambda)$ dla $\lambda>0$

Informacja o kierowcy z poprzedniego roku może brzmieć tak, że:

- Nie nabył ubezpieczenia
- Nabył ubezpieczenie, i miał zero szkód, jedną szkodę, dwie szkody, …

Stosunek warunkowych wartości oczekiwanych:

$$\frac{E(\Lambda|U=1, N=0)}{E(\Lambda|U=0)}$$

wynosi:

$$f_{\Lambda|U=1,N=0}(\lambda)=\frac{P(U=1,N=0|\Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)}{P(U=1,N=0)}=$$

$$=C\cdot P(U=1|\Lambda=\lambda)P(N=0|\Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)=$$

$$=C\cdot(1-e^{-2\lambda})e^{-\lambda}\cdot\lambda e^{-9\lambda}=$$

$$=c\lambda(1-e^{-2\lambda})e^{-10\lambda} \Rightarrow c=\frac{3600}{11}$$

$$E(\Lambda|U=1,N=0)=\int_0^\infty\frac{3600}{11}\lambda^2(1-e^{-2\lambda})e^{-10\lambda}\,d\lambda=\frac{91}{330}$$

$$f_{\Lambda|U=0}(\lambda)=\frac{P(U=0|\Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)}{P(U=0)}=C\cdot e^{-2\lambda}\lambda e^{-9\lambda}=$$

$$=c\lambda e^{-11\lambda} \Rightarrow c=121$$

$$E(\Lambda|U=0)=\int_0^\infty 121\lambda^2e^{-11\lambda}\,d\lambda=\frac{2}{11}$$

$$\text{Wynik}=\frac{91}{330}\cdot\frac{11}{2}=\frac{91}{60}$$

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki:

$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład Pareto dany na półosi dodatniej gęstością:

- $f_Y(y) = \dfrac{2}{(1+y)^3}$
- zaś nadwyżka początkowa i parametr intensywności składki wynoszą:
- $u = 4$, $c = 1.2$, $\lambda = 1$

Prawdopodobieństwo, że do ruiny dojdzie w pierwszym z tych momentów czasu, kiedy nadwyżka spadnie poniżej wartości początkowej, wynosi:

Liczymy $F(x)$ (dystrybuanta szkody)

$$F(x) = \int_0^x \frac{2}{(1+y)^3}\, dy = \int_0^x 2(1+y)^{-3}\, dy = -\frac{1}{(1+y)^2}\Big|_0^x = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$$

Interesuje nas warunek $X \geq u$, czyli $X \geq 4$, czyli:

$$p = \int_4^\infty \frac{\lambda}{c} \cdot (1+x)^{-2}\, dx = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{(1+x)^{-1}}{-1}\Big|_4^\infty = \frac{\lambda}{c}\left(-\frac{1}{1+x}\right)\Big|_4^\infty =$$

$$= \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{1}{5} = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

Zadanie 6.

Mamy trzy zmienne losowe dotyczące szkody, do której doszło w ciągu danego roku:

- T - czas zajścia szkody w ciągu tego roku kalendarzowego, o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0,1)$,
- D - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji, o rozkładzie danym na odcinku $(0, 2)$ gęstością:

$$f_D(x) = 1 - 0.5x\,,$$

- Y – wartość szkody.

Jednostką pomiaru czasu (tak dla zmiennej T, jak i dla zmiennej D) jest 1 rok.

- Zmienne T oraz D są nawzajem niezależne.
- Wartość szkody nie zależy od tego, kiedy do niej dojdzie, natomiast występuje tendencja do szybkiej likwidacji małych szkód i dłużej trwającej likwidacji dużych szkód, co wyraża następujące założenie:

$$\mathrm{E}(Y|D,T) = \mathrm{E}(Y|D) = 10 + D$$

Warunkowa oczekiwana wartość szkody pod warunkiem, że szkoda ta została zlikwidowana w roku zajścia, a więc:

$$E(Y|T + D \leq 1)$$

wynosi:

$$E(Y|T+D\leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-t} E(Y|D=d, T=t)\, f_{D,T|T+D\leq 1}(d,t)\, dt\, dd$$

$$f_{D,T|T+D\leq 1}(d,t) = \frac{P(T+D\leq 1 | D=d, T=t)\, f_{DT}(d,t)}{P(T+D\leq 1)} =$$

$$f_{DT}(d,t) = 1\cdot(1-0.5d) = 1-0.5d \quad \text{z niezależności}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-t}(1-0.5d)\,dd\,dt = \int_0^1 \left[d - \frac{1}{2}\frac{d^2}{2}\right]_0^{1-t} dt = \int_0^1 (1-t) - \frac{1}{4}(1-t)^2\,dt = \frac{5}{12}$$

$$= C\cdot(1-0.5d) \Rightarrow C = \frac{12}{5} \quad \text{całkowanie do } 1$$

$$E(Y|T+D\leq 1) = \frac{12}{5}\int_0^1\int_0^{1-t}(10+d)\left(1-\frac{1}{2}d\right) dd\,dt =$$

$$= \frac{12}{5}\int_0^1\int_0^{1-t} 10 - 4d - \frac{1}{2}d^2\,dd\,dt = \frac{12}{5}\int_0^1\left[10d - 4\cdot\frac{d^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^3}{3}\right]_0^{1-t} dt =$$

$$= \frac{12}{5}\int_0^1 10(1-t) - 2(1-t)^2 - \frac{1}{6}(1-t)^3\,dt = 10.3$$

Zadanie 8.

Wiemy, że w populacji ubezpieczających się od pewnego ryzyka zdarzają się oszuści. Załóżmy, że:

- przypadkowo wylosowany z tej populacji osobnik jest oszustem z prawdopodobieństwem 0.04
- oszust z całą pewnością zgłasza co najmniej jedną szkodę w ciągu roku, a czas zgłoszenia pierwszej z nich (liczony od początku roku) dany jest na odcinku $t \in (0, 1)$ gęstością prawdopodobieństwa $f(t) = \frac{3}{2} - t$
- proces zgłaszania szkód u uczciwych ubezpieczonych jest procesem Poissona z parametrem intensywności $\lambda = \frac{1}{10}$ rocznie

Prawdopodobieństwo iż ubezpieczony jest oszustem pod warunkiem, że zgłosił (pierwszą) szkodę po trzech miesiącach (w momencie czasu $t = 0.25$) wynosi z dobrym przybliżeniem:

$P(S=0) = 0.96$

$P(S=1) = 0.04$ - oszust

$$P(S=1 \mid T=\tfrac{1}{4}) = \frac{P(T=\frac{1}{4} \mid S=1)\,P(S=1)}{P(T=\frac{1}{4})\,P(S=1) + P(T=\frac{1}{4} \mid S=0)\,P(S=0)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 0.04}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 0.04 + \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4}}\cdot 0.96} \approx 0.348$$

Zadanie 9.

Rozkład zmiennej losowej X ma dwie ekwiwalentne reprezentacje:

- jako rozkład złożony geometryczny, z liczbą składników N o rozkładzie:

$$\Pr(N = k) = \frac{2}{3^{k+1}}, \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

oraz wartością pojedynczego składnika o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 2

- jako rozkład złożony dwumianowy, gdzie liczba składników N może wynieść tylko zero lub jeden, zaś wartość składnika (o ile $N = 1$) ma rozkład:

$$P(N=k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \frac{2}{3} \qquad p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3}$$

$$M_N(t) = \frac{q}{1-pe^t} \qquad M_Y(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$M_X(t) = M_N(\ln M_Y(t)) = \frac{q}{1-p\,M_Y(t)} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}}$$

Drugi rozkład

$$M_N(t) = 1-q + qe^t$$

$$P(N=0) = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$M_N(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}M_Y(t) = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}} \quad \Big| \cdot 3$$

$$2 + M_Y(t) = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}} = \frac{2}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-3t}} = \frac{2}{\frac{\frac{3}{2}-3t-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-3t}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{3}{2}-3t}{1-3t} = \frac{3-6t}{1-3t}$$

$$M_Y(t) = \frac{3-6t}{1-3t} - \frac{2-6t}{1-3t} = \frac{1}{1-3t} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-t}$$

$$Y \sim Exp\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$EY = 3$$