Zadanie 1.

O rozkładzie zmiennej X wiadomo, iż:

- $\Pr(X=0)=0.7$
- $\Pr(X>0)=0.3$
- $E(X|X>0)=90$

Zbiór możliwych wartości $E[(X-20)_+]$ jest przedziałem:

$$E[(X-20)_+] = \int_{20}^{\infty} x f(x)\,dx - 20\int_{20}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{20}^{\infty} x f(x)\,dx - 20P(X>20)$$

$$E[X|X>0] = \frac{\int_0^{\infty} x f(x)\,dx}{P(X>0)}$$

$$\int_0^{\infty} x f(x)\,dx = 90\cdot 0.3 = 27$$

$$27 = \int_0^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{20} x f(x)\,dx + \int_{20}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$E[(X-20)_+] = 27 - \int_0^{20} x f(x)\,dx - 20P(X>0) + 20P(0<X\le 20) =$$

$$= 27 - 20\cdot 0.3 - \int_0^{20} x f(x)\,dx + 20\int_0^{20} f(x)\,dx =$$

$$= 21 - \int_0^{20} x f(x)\,dx + 20\int_0^{20} f(x)\,dx$$

min → „trzymamy" jak najwięcej p-stwa powyżej 20

$$E[(X-20)_+] = 21 - 0 + 20\cdot 0 = 21$$

max → „trzymamy" p-stwo blisko 0

$$E[(X-20)_+] = 21 - 0\cdot 0.3 + 20\cdot 0.3 = 27$$

Zadanie 4.

Rozważa się niekiedy następującą formułę składki $\Pi(X)$ za ryzyko X:

- $\Pi(X) = E(X) + E\{[X - E(X)]_+\}$,

a więc gdzie narzut na składkę netto ma postać wartości oczekiwanej nadwyżki zmiennej X ponad swoją wartość oczekiwaną.

Rozważmy wskaźnik względnego narzutu bezpieczeństwa w składce:

- $\theta(X) := \dfrac{\Pi(X) - E(X)}{E(X)}$

dla tej formuły.

Rozważmy też rodzinę rozkładów Pareto z dystrybuantach postaci:

- $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{\nu}{\nu + x}\right)^{\alpha}$,

gdzie parametry dystrybuant mogą przyjmować dowolne wartości spełniające warunki:

- $\nu > 0$ oraz $\alpha > 1$

Kres dolny zbioru wartości wskaźnika $\theta(X)$ dla ryzyk X z tej rodziny wynosi:

$$1 - F_X(x) = \left(\frac{\nu}{\nu+x}\right)^{\alpha} \qquad EX = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx \qquad E[(X-d)_+] = \int_d^\infty (1 - F_X(x))\,dx$$

$$EX = \int_0^\infty \left(\frac{\nu}{\nu+x}\right)^{\alpha} dx = \nu^{\alpha} \int_0^\infty (\nu+x)^{-\alpha}\,dx = \nu^{\alpha} \left.\frac{(\nu+x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_0^\infty =$$

$$= \frac{\nu^{\alpha}}{1-\alpha} \left.\frac{1}{(\nu+x)^{\alpha-1}}\right|_0^\infty = -\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{\nu^{\alpha}}{\nu^{\alpha-1}} = \frac{\nu}{\alpha-1}$$

$$E\{[X-EX]_+\} = E\{[X - \tfrac{\nu}{\alpha-1}]_+\} = \int_{\frac{\nu}{\alpha-1}}^\infty \left(\frac{\nu}{\nu+x}\right)^{\alpha} dx =$$

$$= \left.\frac{\nu^{\alpha}(\nu+x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{\frac{\nu}{\alpha-1}}^\infty = \frac{1}{\alpha-1}\cdot \nu^{\alpha}\left(\nu + \frac{\nu}{\alpha-1}\right)^{1-\alpha} =$$

$$= \frac{\nu^{\alpha}}{\alpha-1}\left(\frac{\alpha\nu - \nu + \nu}{\alpha-1}\right)^{1-\alpha} = \frac{\nu^{\alpha}}{\alpha-1}\left(\frac{\alpha\nu}{\alpha-1}\right)^{1-\alpha} = \frac{\nu}{\alpha-1}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{1-\alpha}$$

$$\theta(X) = \frac{\frac{\nu}{\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{1-\alpha}}{\frac{\nu}{\alpha-1}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha-1} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}$$

Wskaźnik jest minimalizowany gdy $\alpha \to \infty$:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha - 1} = \lim_{\alpha \to \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right]^{-\frac{\alpha - 1}{\alpha}} = e^{-1}$$

Odp. E

Zadanie 6.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona z zerową nadwyżką początkową, z dodatnią wartością oczekiwaną przyrostów procesu, oraz z rozkładem wartości pojedynczej szkody danym gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{poza tym} \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) wynosi:

$$EL_1^k = \frac{EX^{k+1}}{(k+1)\,EX}$$

$$EX = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$EX^2 = \int_0^1 2x^3\,dx = \frac{2x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$EL_1 = \frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$

Odp. A

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat z tytułu n pierwszych wypadków
- wypłata X_i jest równa łącznej kwocie szkód z jednego wypadku: $X_i = Y_i(1) + \ldots + Y_i(M_i)$
- kwoty szkód $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), \ldots, Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), \ldots, Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), \ldots$ oraz liczby szkód przypadających na poszczególne wypadki $M_1, M_2, M_3, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Jeśli przyjmiemy następujące założenia:

- zmienne $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), \ldots, Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), \ldots, Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), \ldots$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej jeden
- zmienne $M_1, M_2, M_3, \ldots$ mają ten sam rozkład przesunięty geometryczny:

  $\Pr(M_i = k) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k$ dla $k = 1, 2, \ldots$
- parametr składki wynosi $c = \lambda \cdot \mathrm{E}(X_1) \cdot 120\%$

wtedy współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) R wyniesie:

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta)\, EX \cdot R$$

$$Y \sim \exp(1)$$

$$X \mid M = m = \sum_{k=1}^{m} Y_k \sim \text{gamma}(m, 1) \qquad f_{X|M=m} = \frac{1}{\Gamma(m)} e^{-x} x^{m-1}$$

$$f_X(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{X|M=m}(x) P(M=m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-x} 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m e^{-x} 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^{m+1} = 2e^{-x} \cdot \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}x\right)^m}{m!} =$$

$$= \frac{2}{3} e^{-x} \cdot e^{\frac{1}{3}x} = \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x} \sim \exp\left(\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - r} = 1 + 1.2 \cdot \frac{3}{2} r$$

$$\frac{2}{2-3r} = 1 + 1.8 r$$

$2 = 2 + 3.6r - 3r - 5.4r^2$

$5.4r^2 - 0.6r = 0$

$r(5.4r - 0,6) = 0$

$r = 0 \quad \vee \quad r = \frac{1}{9}$

$R = \frac{1}{9}$

Odp. B

DRUGA METODA

$S(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim CP(\lambda t, F_X)$

$$M_N(t) = \frac{\frac{2}{3} e^t}{1 - \frac{2}{3} e^t}$$

$$M_Y(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$M_X(r) = M_N(\ln M_Y(r)) = \frac{\frac{2}{3} \exp(\ln \frac{1}{1-r})}{1 - \frac{1}{3} \exp(\ln \frac{1}{1-r})} = \frac{\frac{2}{3}(\frac{1}{1-r})}{1 - \frac{1}{3}(\frac{1}{1-r})} =$$

$$= \frac{2}{3-3r} \cdot \frac{3-3r}{2-3r} = \frac{2}{2-3r}$$

$$EX = M_X'(r)\Big|_{r=0} = \frac{6}{(2-3r)^2}\Big|_{r=0} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{2-3r} = 1 + 1.2 \cdot \frac{3}{2} \cdot r$$

$2 = 2 + 3.6r - 3r - 5.4r^2$

$5.4r^2 - 0.6r = 0$

$r(5.4r - 0.6) = 0$

$r = 0 \quad \vee \quad r = \frac{1}{9}$

Zadanie 8.

Niech (T, D) oznaczają czas kalendarzowy zajścia szkody oraz czas likwidacji szkody (okres czasu, jaki upływa od zajścia szkody do jej likwidacji).

Przyjmijmy że:

- intensywność procesu pojawiania się szkód rosła od niepamiętnych czasów do momentu $t = 0$ wykładniczo (z wykładnikiem $\delta > 0$), co oznacza że czas zajścia losowo wybranej szkody zaszłej przed czasem $t = 0$ ma rozkład o gęstości:
$$f_T(t) = \begin{cases} \delta \exp(\delta t) & gdy \quad t < 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases},$$
- rozkład czasu likwidacji szkody dany jest gęstością:
$$f_D(t) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta t) & gdy \quad t > 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$$
- (T, D) są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Oczekiwana wartość czasu likwidacji dla tych szkód, które w momencie czasu $t = 0$ mają status szkód zaszłych, ale jeszcze nie zlikwidowanych, a więc:

- $E(D \mid T + D > 0)$,

Wynosi:

$$P(D \mid T+D>0) = c\,P(T+D>0 \mid D=d)\,P(D=d) = c\,P(T>-d)\,P(D=d) =$$
$$= c\,(1 - P(T < -d))\,P(D=d)$$

$$P(D=d) = \beta e^{-\beta d}$$

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta e^{\delta x}\,dx = e^{\delta x}\Big|_{-\infty}^{t} = e^{\delta t}$$

$$P(T < -d) = e^{-\delta d}$$

$$P(D=d \mid T+D>0) = c\,e^{-\beta d}(1 - e^{-\delta d}) = c\left[e^{-\beta d} - e^{-d(\beta+\delta)}\right]$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta d} - e^{-d(\beta+\delta)}\,dd = -\frac{1}{\beta}e^{-\beta d} + \frac{1}{\beta+\delta}e^{-d(\beta+d)}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta+\delta} = \frac{\beta+\delta-\beta}{\beta(\beta+\delta)} = \frac{\delta}{\beta(\beta+\delta)}$$

$$c = \frac{\beta(\beta+\delta)}{\delta}$$

$$E[D \mid T+D>0] = \frac{\beta(\beta+\gamma)}{\gamma}\int_0^\infty d e^{-\beta d} - d e^{-d(\beta+\gamma)}\, dd =$$

$$= \frac{\beta(\beta+\gamma)}{\gamma}\cdot\left(\frac{\Gamma(2)}{\beta^2} - \frac{\Gamma(2)}{(\beta+\gamma)^2}\right) = \frac{\cancel{\beta(\beta+\gamma)}}{\gamma}\cdot\frac{\cancel{\beta^2}+2\beta\gamma+\gamma^2-\cancel{\beta^2}}{\beta^{\cancel{2}}(\beta+\gamma)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{\cancel{\gamma}(2\beta+\gamma)}{\cancel{\gamma}\beta(\beta+\gamma)} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{2\beta+\gamma}{\beta+\gamma}\right) = \frac{1}{\beta}\left(1+\frac{\beta}{\beta+\gamma}\right)$$

Zadanie 9.

W pewnym portfelu ubezpieczeń występuje tendencja do dłuższego czasu likwidacji dużych szkód niż szkód małych. Oto prosty model tego zjawiska:

Y, D to wartość i czas opóźnienia likwidacji losowo wybranej szkody, przy czym rozkład bezwarunkowy zmiennej D określamy następująco:

- $D = 0$ jeśli szkodę likwiduje się w tym samym kwartale, kiedy do niej doszło,
- $D = 1$ jeśli szkodę likwiduje się w następnym kwartale,
- $D = 2$ jeśli szkodę likwiduje się jeszcze o kwartał później, itd.,

a zależność wartości szkody i opóźnienia wyraża założenie, że:

- $\mathrm{E}(Y|\mathrm{D} = \mathrm{k}) = \mu(1 + w)^k$

Rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu ilościowym dany jest więc ciągiem:

- $r_k := \Pr(D = k)$

zaś rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu wartościowym dany jest ciągiem:

- $R_k := r_k \frac{\mathrm{E}(Y|D = k)}{\mathrm{E}(Y)}$

Załóżmy, że zachodzi:

- $r_k = (k + 1)\left(\frac{4}{10}\right)^2\left(\frac{6}{10}\right)^k, \quad k = 0,1,2, \ldots$
- oraz: $\quad w = \frac{1}{9}$.

Wobec tego $\frac{R_2}{r_2}$ wynosi (w przybliżeniu):

$$\frac{R_2}{r_2} = \frac{r_2 \frac{E(Y|D=k)}{E(Y)}}{r_2} = \frac{E(Y|D=k)}{E(Y)}$$

$$E(Y|D=2) = \mu(1+w)^2 = \mu\left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{100}{81}\mu$$

$$E(Y) = E(E(Y|D)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(Y|D) \cdot P(D=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(\frac{10}{9}\right)^k (k+1)\left(\frac{4}{10}\right)^2\left(\frac{6}{10}\right)^k =$$

$$= \frac{16}{100}\mu\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{16}{100}\mu \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}}_{\text{EX rozk. geo}} \cdot 3 = \frac{16}{100}\mu \cdot 3 \cdot 3 = \frac{144}{100}\mu$$

$$\frac{R_2}{r_2} = \frac{\frac{100}{81}\mu}{\frac{144}{100}\mu} \approx 0{,}857$$

Zadanie 10.

Dla dowolnej zmiennej losowej X o wartości oczekiwanej μ, wariancji $\sigma^2 > 0$ oraz momencie centralnym μ_{2k} rzędu $2k$ zachodzą nierówności (typu Czebyszewa):

$\Pr(X > \mu + t\sigma^2) < \frac{\mu_{2k}}{t^{2k}\sigma^{2k}}$, $\qquad k = 1,2,3,\ldots, \qquad t > 0$

Jeśli $\mu_4 < \infty$, wtedy istnieje taka liczba t^*, że:

- dla $t < t^*$ ściślejsze ograniczenie na prawdopodobieństwo $\Pr(X > \mu + t\sigma^2)$ otrzymujemy przyjmując $k = 1$,
- zaś dla $t > t^*$ ściślejsze ograniczenie otrzymujemy przyjmując $k = 2$.

Wiemy, że zmienna losowa X jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach:

- z zerową wartością oczekiwaną, wariancją równą 4, oraz momentem centralnym czwartego rzędu równym $6 \cdot 4^2$.

Liczba t^* dla zmiennej losowej X wynosi:

$C_{i,X}$ - kumulanta i zm. los. X

Dla niezależnych zm. los. X i Y:

$C_{n,X+Y} = C_{n,X} + C_{n,Y}$

$C_{1,X} = \mu_X$

$C_{2,X} = \sigma_X^2$

$C_{3,X} = \mu_{3,X}$

$C_{4,X} = \mu_{4,X} - 3\mu_{2,X}^2$

Dla $k=1$: $P(X > \mu + t\sigma^2) = \frac{\mu_2}{t^2\sigma^2} = \frac{1}{t^2}$

Dla $k=2$: $P(X > \mu + t\sigma^2) = \frac{\mu_4}{t^4\sigma^4}$

$\frac{1}{t^2} = \frac{\mu_4}{t^4\sigma^4} \quad / \cdot t^4$

$t^2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$

$t = \sqrt{\frac{\mu_4}{\sigma^4}}$

$X = X_1 + X_2$

$EX_1 = EX_2 = 0$

$Var(X_1) = Var(X_2) = 4$

$\mu_{4,X_1} = \mu_{4,X_2} = 6 \cdot 4^2$

$EX = 0$

$Var(X) = 8$

$$C_{4,X} = C_{4,X_1} + C_{4,X_2} = \mu_{4,X_1} + \mu_{4,X_2} - 3\mu_{2,X_1}^2 - 3\mu_{2,X_2}^2 =$$

$$= 2(6 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^2)$$

$$\mu_{4,X} = C_{4,X} + 3\mu_{2,X}^2 = 2(6 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^2) + 3 \cdot 8^2 = 288$$

$$t = \sqrt{\frac{288}{8^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$