Zadanie 6.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma postać:

$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$

gdzie:

- u – to wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$ - to złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości λ, wyrażający zagregowaną wartość szkód do momentu t,
- składka c równa jest oczekiwanej wartości szkód za okres jednostkowy pomnożonej przez czynnik $(1+\theta)$.

Niech:

- l_1 będzie wartością, o którą nadwyżka spada poniżej poziomu wyjściowego w pierwszym momencie, w którym do spadku dochodzi (o ile do niego dojdzie),
- $L = l_1 + \cdots + l_N$ to maksymalna całkowita strata, gdzie l_k to k-ty z kolei spadek poniżej poprzedniego rekordu dolnego, zaś N to liczba wystąpień takich spadków w całym przebiegu procesu $U(t)$.

Jeżeli zmienna l_1 ma rozkład określony na przedziale $[0, 2]$ o gęstości równej:

$$f_l(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & dla \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{3} & dla \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

to funkcja generująca momenty $M_L(r)$ dla r nierównego zeru jest postaci:

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta - M_{L_1}(r)}$$

$$M_{L_1}(r) = Ee^{rL_1} = \int_0^1 e^{rL} \cdot \frac{2}{3}\, dL + \int_1^2 e^{rL} \cdot \frac{1}{3}\, dL = \frac{2}{3r} e^{rL}\Big|_0^1 + \frac{1}{3r} e^{rL}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3r}e^{r} - \frac{2}{3r} + \frac{1}{3r}e^{2r} - \frac{1}{3r}e^{r} = \frac{e^{2r} + e^{r} - 2}{3r}$$

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta - M_{L_1}(r)} = \frac{\theta}{1+\theta - \frac{e^{2r}+e^{r}-2}{3r}} = \frac{3r\theta}{3r(1+\theta) - e^{2r} - e^{r} + 2} =$$

$$= \frac{3r\theta}{2 + 3r(1+\theta) - e^{r}(e^{r}+1)}$$

Odp. E

Zadanie 8.

Liczba szkód N w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód równą $E(N) = 22.62$.

Wartość każdej ze szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^2$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\} & jeżeli\ N > 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$$

Kwantyl rzędu 0.95 rozkładu zmiennej M, a więc taka liczba $y_{0.95}$, dla której:

$$\Pr(M \le y_{0.95}) = 0.95$$

wynosi:

p-stwo całkowite

$$P(M \le y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(M \le y \mid N = n) P(N = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) P(Y_1 \le y, Y_2 \le y, \dots, Y_n \le y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \left[1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^2\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{n!} \left[\lambda\left(1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)\right)^2\right]^n =$$

$$= \exp\left\{-\lambda\left(\frac{1}{1+y}\right)^2\right\} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp\left\{-\lambda\left(1 - \frac{1}{1+y}\right)^2\right\} \left[\lambda\left(1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^2\right)\right]^n}_{=1} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda\left(\frac{1}{1+y}\right)^2\right\}$$

$$0.95 = \exp\left\{-\lambda\left(\frac{1}{1+y}\right)^2\right\}$$

$$\ln(0.95) = -\lambda\left(\frac{1}{1+y}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{\ln(0.95)}{-\lambda}} = \frac{1}{1+y}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\ln(0.95)}{-\lambda}}} - 1 \approx 20$$

Zadanie 9.

Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka $X = Y_1 + \cdots + Y_N$ jest zmienną losową o rozkładzie złożonym. Liczba szkód N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 3ln(2), zaś wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład dany wzorem:

$$\Pr(Y_1 = k) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{0.5^k}{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód wyniesie 6, równa jest:

Wzór Panjera gdy $N \sim P(\lambda)$:

$$f_X(0) = \exp(-\lambda)$$

$$f_X(k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda j}{k} f_Y(j) f_X(k-j)$$

$$P(X=0) = \exp(-3\ln(2)) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=k) = \sum_{j=1}^{k} 3\ln(2) \cdot \frac{j}{k} \cdot \frac{0.5^j}{j} \cdot \frac{1}{\ln(2)} P(X=k-j) =$$

$$= \frac{3}{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^j P(X=k-j)$$

$$P(X=1) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

$$P(X=3) = \frac{3}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{12}$$

$$P(X=4) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{32} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{128}$$

$$P(X=5) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{128} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{32} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{21}{256}$$

$$P(X=6) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{21}{256} + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{128} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{32} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{32} \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{128}$$

Zadanie 10.

W kolejnych okresach czasu $j = 1, 2, 3$ ubezpieczony, charakteryzujący się parametrem ryzyka Θ, generuje N_j szkód. Dla danego $\Theta = \theta$ zmienne N_1, N_2, N_3 są warunkowo niezależne i mają taki sam rozkład:

$$Pr(N_1 = k|\Theta = \theta) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}, \qquad k = 0,1,2 \ldots$$

Parametr ryzyka Θ przyjmuje w populacji ubezpieczonych wartości: 1 lub 2.
Mamy do czynienia z dwuetapowym doświadczeniem losowym:

- najpierw losujemy z populacji ubezpieczonego, a wraz z nim jego wartość parametru ryzyka, zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa: $\Pr(\Theta = 1) = 0.5 = \Pr(\Theta = 2)$
- następnie obserwujemy liczby generowanych przez niego szkód N_1 i N_2.

Wnioskujemy na tej podstawie o liczbie szkód w następnym okresie, czyli N_3.
$Pr(N_3 = 0|N_1 + N_2 = 2)$ wynosi w przybliżeniu:

$$P(N_1+N_2=k|\Theta) = \frac{(2\theta)^k}{k!}e^{-2\theta}$$

$$P(N_3=0|N_1+N_2=2) = P(N_3=0|\theta=1)P(\theta=1|N_1+N_2=2) +$$
$$+ P(N_3=0|\theta=2)P(\theta=2|N_1+N_2=2)$$

$$P(\Theta|N_1+N_2=2) = c\cdot P(N_1+N_2=2|\Theta=\theta)P(\Theta=\theta) =$$
$$= c\cdot\theta^2 e^{-2\theta} \Rightarrow c = \frac{1}{e^{-2}+4e^{-4}}$$

$$\left[1^2e^{-2}+2^2e^{-4} = e^{-2}+4e^{-4}\right]$$

$$P(N_3=0|N_1+N_2=2) = e^{-1}\frac{e^{-2}}{e^{-2}+4e^{-4}} + e^{-2}\frac{4e^{-4}}{e^{-2}+4e^{-4}} =$$

$$= \frac{e^{-3}+4e^{-6}}{e^{-2}+4e^{-4}} \approx 0.29$$