Zadanie 1.

Pewien podmiot kieruje się w decyzjach maksymalizacją wartości oczekiwanej funkcji użyteczności o postaci:

$u(x) = \ln(x)$.

Tymczasem majątek tego podmiotu wynosi w. Połowa tego majątku narażona jest jednak na ryzyko całkowitej utraty, co może nastąpić z prawdopodobieństwem q. Od tego ryzyka można się na rynku ubezpieczyć. Rynek oferuje kontrakty z udziałem własnym ubezpieczonego, wyceniane według wartości oczekiwanego odszkodowania pomnożonej przez czynnik $(1+\theta)$. Przy założeniu, iż:

$w = 2, \quad q = 1/5, \quad \theta = 1/4,$

podmiot ten wybierze kontrakt z udziałem własnym w wysokości:

X - strata

α - udział własny

P - cena ubezp.

Dla $w = 2$ mamy:

$$\left.\begin{array}{l} P(X = 0.5w) = P(X=1) = 0.2 \\ P(X=0) = 0.8 \end{array}\right\} EX = 0.2$$

$$P = (1+\theta)EX(1-\alpha) = 1.25 \cdot 0.2(1-\alpha) = 0.25(1-\alpha)$$

Szukamy $E[u(w - P - \alpha X)] \to \max$

$$u(w - P - \alpha X) = u(2 - 0.25(1-\alpha) - \alpha X)$$

$$E[u(w-P-\alpha X)] = E[\ln(2 - 0.25(1-\alpha) - \alpha X)] = E[\ln(1.75 + 0.25\alpha - \alpha X)] =$$

$$= 0.2\ln(1.75 + 0.25\alpha - \alpha) + 0.8\ln(1.75 + 0.25\alpha) =$$

$$= 0.2\ln(1.75 - 0.75\alpha) + 0.8\ln(1.75 + 0.25\alpha) = f(\alpha)$$

$$f'(\alpha) = \frac{-0.2 \cdot 0.75}{1.75 - 0.75\alpha} + \frac{0.8 \cdot 0.25}{1.75 + 0.25\alpha} = 0$$

$$\frac{-0.15(1.75 + 0.25\alpha) + 0.2(1.75 - 0.75\alpha)}{(1.75 - 0.75\alpha)(1.75 + 0.25\alpha)} = 0$$

$$-0.2625 - 0.0375\alpha + 0.35 - 0.15\alpha = 0$$

$$0.1875\alpha = 0.0875$$

$$\alpha = \frac{7}{15}$$

Zadanie 3.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma tę samą postać co w poprzednim zadaniu:

$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$

gdzie:

- u - wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$ - to złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości λ, wyrażający zagregowaną wartość szkód do momentu t,
- składka c równa jest oczekiwanej wartości szkód za okres jednostkowy pomnożonej przez czynnik $5/4$.

Tym razem rozkład wartości pojedynczej szkody Y jest inny, a mianowicie taki, że $\ln(Y)$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu, \sigma^2) = (1, 2)$.

Niech $L := \sup_{t>0}(U(0) - U(t))$ oznacza maksymalną możliwą stratę.

Jej wartość oczekiwana wynosi:

Wartość oczekiwana maksymalnej możliwej straty:

$$EL = \frac{EY^2}{2\theta EY}$$

$X = \ln(Y) \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$e^X = Y$

$$EY = E(e^X) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}) = \exp(1+1) = e^2$$

$$EY^2 = E(e^{2X}) = \exp(2\mu + \frac{4\sigma^2}{2}) = \exp(2+4) = e^6$$

$$\theta = \frac{c}{\lambda EY} - 1 = \frac{\frac{5}{4}\lambda EY}{\lambda EY} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$EL = \frac{e^6}{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^2} = 2e^4$$

Zadanie 6.

Ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona, z częstotliwością 1/5 rocznie; wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy z niezmienną w czasie wartością oczekiwaną równą 5000.

Odstępy w czasie między momentami zajścia szkód a momentami wypłaty odpowiadających im odszkodowań są także niezależnymi (nawzajem oraz od przebiegu złożonego procesu Poissona) zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym, z wartością oczekiwaną równą 1/2 roku.

Składka za ubezpieczenie pełne od tego ryzyka na okres roku płatna jest jednorazowo z góry. Niech i oznacza efektywną stopę procentową (roczną), a d oraz δ odpowiednio efektywną stopę dyskonta i natężenie oprocentowania. Składka równa zdyskontowanym oczekiwanym wypłatom odszkodowań wynosi:

X - wartość poj. szkody

$X \sim Exp\left(\frac{1}{5000}\right)$

$Y \sim$ odstępy w czasie

$Y \sim Exp(2)$

$Z \sim$ odszkodowanie

$v = \frac{1}{1+i}$ - czynnik dyskontujący

$v = \exp(-\delta)$

$1-d = v$ - stopa dyskonta

$$Z = \frac{X}{(1+i)^Y}$$

$$EZ = EX \cdot E\left(\frac{1}{(1+i)^Y}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{(1+i)^Y}\right) = \int_0^\infty e^{-\delta y} 2e^{-2y}\,dy = 2\int_0^\infty e^{-(2+\delta)y}\,dy =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2+\delta} e^{-(2+\delta)y}\right)\Big|_0^\infty = \frac{2}{2+\delta}$$

$$EZ = 5000 \cdot \frac{2}{2+\delta} = \frac{10000}{2+\delta}$$

$$\int_0^1 \frac{10000}{2+\delta}\, 0.2 e^{-\delta s}\,ds = \frac{2000}{2+\delta} \cdot \frac{1-e^{-\delta}}{\delta} = 1000 \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{2}{2+\delta}$$

Zadanie 9.

Proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z liczbą szkód w ciągu roku N o wartości oczekiwanej równej λ, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład określony na przedziale $(0, S)$.

Ubezpieczenie roczne pokrywa wszystkie szkody, z tym że oprócz składki początkowej w kwocie cS ubezpieczony po każdej szkodzie dopłaca za odnowienie pierwotnej sumy ubezpieczenia składkę odnowieniową skalkulowaną w oparciu zasadę *pro rata temporis*, a więc:

- po szkodzie k-tej o wysokości Y_k, do której doszło w momencie czasu T_k (przy założeniu że ten moment nastąpił przed upływem roku, a więc że $T_k < 1$), dopłata wynosi $cY_k(1 - T_k)$

Całkowita składka wynosi więc $\pi = cS + c\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1 - T_k)_+$.

Jeśli parametry zadania wynoszą:

$\lambda = 1/2, \quad E(Y_1) = 10, \quad var(Y_1) = 170,$

to wariancja składki całkowitej $var(\pi)$ wynosi

$$Var(\pi) = Var\left(cS + c\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1-T_k)\right) = c^2\, Var\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1-T_k)}_{X}\Big)$$

$$Var(X) = Var(E[X|Y]) + E[Var(X|Y)]$$

U nas:

$$Var(X) = Var(E[X|N]) + E[Var(X|N)]$$

$$E[X|N] = E\left[\sum_{k=1}^{N} Y_k(1-T_k) \,\Big|\, N\right] = \sum_{k=1}^{N} E[Y_k]\, E[1-T_k|N] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{E[Y_k]}_{10}\Big(1-\underbrace{E[T_k|N]}_{\frac{1}{2} \text{ bo wz. jednostajny}}\Big) = N\cdot 10\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = 5N$$

$$Var(X|N) = Var\left(\sum_{k=1}^{N} Y_k(1-T_k) \,\Big|\, N\right) = \sum_{k=1}^{N} Var(Y_k(1-T_k)|N) =$$

$$\left[\begin{aligned} Var(XY) &= E(XY)^2 - (E(XY))^2 = EX^2\, EY^2 - (EX\,EY)^2 = \\ &= [Var(X) + (EX)^2][Var(Y) + (EY)^2] - (EX\,EY)^2 = \\ &= Var(X)Var(Y) + Var(Y)(EX)^2 + Var(X)(EY)^2 \end{aligned}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\Big[Var(Y_k)\underbrace{Var(1-T_k|N)}_{Var\ w\ U(0,1)} + Var(1-T_k|N)(EY_k)^2 + Var(Y_k)[E(1-T_k|N)]^2\Big] =$$

$$= N\left(170\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\cdot 100 + 170\cdot\frac{1}{4}\right) = 65N$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(5N) + E(65N) = 25\,\mathrm{Var}(N) + 65\,EN = 25 \cdot \frac{1}{2} + 65 \cdot \frac{1}{2} = 45$$

$$\mathrm{Var}(\Pi) = 45c^2$$