Zadanie 1.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona ze stosunkowym narzutem bezpieczeństwa na składkę netto θ. Wartość pojedynczej szkody Y jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$, $\alpha=2$, $\beta=2$.

Ile wynoszą wartość oczekiwana $E(l_1)$ i wariancja $var(l_1)$ zmiennej l_1, wyrażającej (na półosi dodatniej) spadek, jakiemu ulegnie nadwyżka po raz pierwszy, licząc od jej poziomu początkowego, o ile kiedykolwiek do takiego spadku dojdzie?

$$E(L_1^k) = \frac{EY^{k+1}}{(k+1)\,EY}$$

Momenty rozkładu gamma: $EY^k = \frac{1}{\beta^k} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$

$$EY = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\Gamma(2)}{\Gamma(2)} = 1$$

$$EY^2 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\Gamma(2+2)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(2)} = \frac{3}{2}$$

$$EY^3 = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\Gamma(2+3)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(2)} = 3$$

$$EL_1 = \frac{EY^2}{2EY} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$EL_1^2 = \frac{EY^3}{3EY} = \frac{3}{3} = 1$$

$$Var(L_1) = EL_1^2 - (EL_1)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Odp. A

Zadanie 2.

W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym składka należna za rok wynosi 2, a rozkład łącznej wartości szkód za n-ty rok W_n dany jest dla każdego n wzorem:

$\Pr(W_n = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$

gdzie $p = 1 - q$,

i gdzie zakładamy iż $p > \frac{1}{3}$,

oraz iż $W_1, W_2, \ldots$ są nawzajem niezależne.

W tym modelu współczynnik przystosowania (*adjustment coefficient*) R wynosi:

$$M_W(r) = \frac{p}{1-qe^r}$$

$$M_W(r) = e^{cr}$$

$$\frac{p}{1-qe^r} = e^{2r}$$

$$e^{2r} - qe^{3r} = p$$

$$x = e^r$$

$$x^2 - qx^3 - p = 0$$

$$qx^3 - x^2 + p = 0$$

$$\begin{array}{l} \underline{qx^2 + (q-1)x + (q-1)} \\ qx^3 - x^2 + p : (x-1) \\ \underline{-qx^3 + qx^2} \\ (q-1)x^2 + p \\ \underline{-(q-1)x^2 + (q-1)x} \\ (q-1)x + p \\ \underline{-(q-1)x + (q-1)} \\ p + q - 1 = 0 \end{array}$$

$$qx^2 + (q-1)x + (q-1) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (q-1)^2 - 4q(q-1) = p^2 - 4qp$$

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4qp}}{2q} < 0$$

$$x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4qp}}{2q}$$

$$e^r = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4qp}}{2q}$$

$$R = \ln\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 4qp}}{2q}\right)$$

Odp. D

Zadanie 3.

Zakładamy ten sam model, co w zadaniu poprzednim, tzn:
model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym, ze składką roczną równą 2, i rozkładem łącznej wartości szkód za n-ty rok W_n danym dla każdego n wzorem:

$\Pr(W_n = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$

gdzie $p = 1 - q$,

oraz iż $W_1, W_2, \ldots$ są nawzajem niezależne.

Tym razem przyjmujemy konkretną wartość parametru $p = 1/2$. Przyjmujemy ponadto, iż wartość nadwyżki początkowej równa jest 1.

Prawdopodobieństwo ruiny (w nieskończonym horyzoncie czasowym) wynosi:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)} \mid T < \infty)}$$

Z poprzedniego zadania:

$$R = \ln\left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 4qp}}{2q}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot \frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$e^{-Ru} = e^{-R} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$-U(T) = Y + 1$$

$$E(e^{R(Y+1)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{Rk+R} pq^k = pe^R \sum_{k=0}^{\infty} (qe^R)^k = \frac{pe^R}{1 - qe^R} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{4}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$\Psi(1) = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{9-6\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{14-6\sqrt{5}}{4} =$$

$$= \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

Odp. A

Zadanie 6.

O łącznej wartości szkód X z pewnego kontraktu ubezpieczeniowego wiemy, iż:

- jest nieujemna, tzn. $\Pr(X \geq 0) = 1$;
- ma wartość oczekiwaną równą 20;
- wartość oczekiwana nadwyżki ponad 10 wynosi 13, tzn.: $E\left[(X-10)_+\right] = 13$
- wartość szkód jest mniejsza od 10 z prawdopodobieństwem 0.5.

Zbiór wszystkich możliwych wartości $E\left[(X-5)_+\right]$ to przedział:

Założenia

- $X \geqslant 0$
- $EX = 20$
- $E[(X-10)_+] = 13$
- $P(X < 10) = \frac{1}{2}$

$E[(X-5)_+] = ?$

$$E(X-5)_+ = E(X-5)_+ \mathbb{1}(X \geqslant 10) + E(X-5)_+ \mathbb{1}(X < 10) =$$

$$= EX \cdot \mathbb{1}(X \geqslant 10) - 5 \cdot E\mathbb{1}(X \geqslant 10) + E(X-5)_+ \cdot \mathbb{1}(X < 10) =$$

$$= E(X-10)_+ \cdot \mathbb{1}(X \geqslant 10) + \frac{5}{2} + E(X-5)_+ \mathbb{1}(X < 10) =$$

$$= 15.5 + E(X-5)_+ \cdot \mathbb{1}(X < 10)$$

Jakie są możliwe wartości tego wyrażenia?

Mamy ograniczenie $EX = 20$, więc:

$20 = EX \cdot \mathbb{1}(X \geqslant 10) + EX \cdot \mathbb{1}(X < 10) = 18 + EX \cdot \mathbb{1}(X < 10)$, czyli

$EX \cdot \mathbb{1}(X < 10) = 2 \leftarrow$ to jest nasze ograniczenie na $X | X < 10$

- Wartość oczekiwana ze zm. $\geqslant 0$, czyli na pewno to jest $\geqslant 0$;
  pytanie czy 0 jest osiągane?
  Jeżeli $X | X < 10$ jest stale równe 4, to ograniczenie jest spełnione
  oraz $(X-5)_+ = 0$

- żeby dostać ograniczenie górne, chcemy, żeby jak największa część rozkładu $X|X<10$ trafiła powyżej progu 5, czyli z p-stwem

$P(X=0 \vee X \geq 5) = 1$

Niech $p = P(X=0)$

$$E(X-5)_+ \mathbb{1}(X<10) = E\, 0\cdot\mathbb{1}(X<5) + E(X-5)\mathbb{1}(5 \leq X < 10) =$$

$$= E(X-5)\mathbb{1}(5\leq X<10) = EX\mathbb{1}(5\leq X<10) - 5P(5\leq X<10) =$$

$$= EX\mathbb{1}(X<10) - EX\mathbb{1}(X<5) - 5[P(X<10) - P(X<5)] =$$

$$= 2 - 5\left(\tfrac{1}{2} - p\right) = 5p - \tfrac{1}{2}$$ więc pytanie jakie jest największe możliwe p

żeby dostać jak największe p to umieszczamy m. $X|X<10$ do 0 (z p-stwem p) oraz całą resztę do 10:

$$2 = EX\mathbb{1}(X<10) = 0p + 10\left(\tfrac{1}{2} - p\right) = 5 - 10p$$

$p = 0.3$

Stąd $E(X-5)_+ \mathbb{1}(X<10) = 1$

DRUGA METODA

$$E[(X-5)_+] = \int_0^\infty (x-5)_+ f(x)\,dx = \int_5^\infty x f(x)\,dx - 5\int_5^\infty f(x)\,dx =$$

$$= \int_{10}^\infty x f(x)\,dx + \int_5^{10} x f(x)\,dx - 5P(X\geq 10) - 5P(5\leq X<10)$$

$$13 = E[(X-10)_+] = \int_{10}^\infty x f(x)\,dx - 10P(X\geq 10) = \int_{10}^\infty x f(x)\,dx - 5$$

$$\int_{10}^\infty x f(x)\,dx = 18$$

$$20 = EX = \int_0^{10} x f(x)\,dx + \int_{10}^\infty x f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^{10} x f(x)\,dx = 2$$

$$E[(X-5)_+] = 18 + \int_5^{10} x f(x)\,dx - 5\cdot 0.5 - 5P(5\leq X<10) =$$

$$= 15{,}5 + \int_5^{10} x f(x)\,dx - 5P(5 \le X \le 10)$$

min → „trzymany" jak najwięcej p-stwa poniżej 5

$$E[(X-5)_+] = 15.5$$

max → „trzymany" p-stwo w 10

$$E[(X-5)_+] = 15.5 + \underbrace{10 \cdot 0.2} - 5 \cdot 0.2 = 16.5$$

bo $\int_5^{10} f(x)\,dx = 0.2$