Zadanie 1.
Każdej jednostce z pewnej populacji przydarzają się szkody zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ (rocznie), pod warunkiem że parametr ryzyka Λ charakteryzujący tę jednostkę wynosi λ. Znamy pierwsze trzy momenty rozkładu zmiennej Λ w tej populacji:
$E\Lambda = 0.2$, $E(\Lambda^2) = 0.1$, $E(\Lambda^3) = 0.08$.
Niech N oznacza liczbę szkód wygenerowaną przez (losowo wybraną z tej populacji) jednostkę w ciągu dwóch kolejnych lat. Moment centralny trzeciego rzędu zmiennej N wynosi:

$X|\Lambda = Poiss(\Lambda)$

$N|\Lambda = Poiss(2\Lambda)$

$M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$

$M_X'(t) = \exp\{\lambda(e^t-1)\} \cdot \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda$

$M_X''(t) = \exp\{\lambda(e^t-1)\} \cdot \lambda e^t \cdot \lambda e^t + \exp\{\lambda(e^t-1)\} \cdot \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$

$$M_X'''(t) = \exp\{\lambda(e^t-1)\} \lambda e^t \cdot \lambda^2 e^{2t} + \exp\{\lambda(e^t-1)\} \lambda^2 e^{2t} \cdot 2 +$$
$$+ \exp\{\lambda(e^t-1)\} \lambda e^t \cdot \lambda e^t + \exp\{\lambda e^t - 1)\} \lambda e^t \Big|_{t=0} =$$
$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$EX = \lambda$

$EX^2 = \lambda^2 + \lambda$

$EX^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$

$EN = E[E(N|\Lambda)] = E(2\Lambda) = 2E\Lambda = 2 \cdot 0.2 = 0.4$

$EN^2 = E[E(N^2|\Lambda)] = E(4\Lambda^2 + 2\Lambda) = 4E\Lambda^2 + 2E\Lambda = 4 \cdot 0.1 + 0.4 = 0.8$

$EN^3 = E[E(N \; |\Lambda)] = E(8\Lambda^3 + 12\Lambda^2 + 2\Lambda) = 8E\Lambda^3 + 12E\Lambda^2 + 2E\Lambda =$

$= 8 \cdot 0.08 + 12 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 = 2.24$

$E[N - EN]^3 = E[N^3 - 3N^2 EN + 3N(EN)^2 - (EN)^3] =$

$= EN^3 - 1.2\,EN^2 + 0.48\,EN - 0.064 = 1.408$

Zadanie 2.

Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$U_n = u + X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, gdzie:

- u to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach;

rozkład zmiennej $\boldsymbol{X_1}$ jest pięciopunktowy:

$$\Pr(X_1 = 3) = p_3,$$
$$\Pr(X_1 = 2) = p_2,$$
$$\Pr(X_1 = 1) = p_1,$$
$$\Pr(X_1 = 0) = p_0,$$
$$\Pr(X_1 = -1) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3.$$

Niech $N = \min\{n\colon\ U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny.

Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą: $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1/12$, oraz $u = 9/2$. W tych warunkach ruina jest pewna, a więc $\Pr(N < \infty) = 1$. Wobec tego oczekiwany czas do ruiny $\mathrm{E}(N)$ jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

(A) 30

(B) 25

(C) 21

(D) 18

(E) 15

Wskazówka: zauważ, że przyrosty nadwyżki są liczbami całkowitymi, a przyrost ujemny może wynieść jedynie -1.

Ruina zajdzie, gdy znajdziemy się w punkcie $-\frac{1}{2}$, czyli musimy wykonać 5 kroków w dół:

$$EX = (3+2+1)\cdot\frac{1}{12} - 1\cdot\frac{8}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$EN = \frac{5}{\left|-\frac{1}{6}\right|} = 30$$

Zadanie 3.

Wiadomo, że zmienne losowe N_1, N_2, N_3 są niezależne, i mają rozkłady określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, spełniające zależności rekurencyjne:

$$\Pr(N_1 = k) = \frac{1}{2} \cdot \Pr(N_1 = k-1), \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\Pr(N_2 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) \cdot \Pr(N_2 = k-1), \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\Pr(N_3 = k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right) \cdot \Pr(N_3 = k-1), \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Wobec tego $\Pr(N_1 + N_2 + N_3 = 3)$ wynosi:

$P(N=k) = (a + \frac{b}{k}) P(N = k-1)$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$

$NB(r, q): (a, b) = (q, (r-1)q)$

$N_1 \sim NB(1, \frac{1}{2})$

$N_2 \sim NB(2, \frac{1}{2})$

$N_3 \sim NB(3, \frac{1}{2})$

$X = N_1 + N_2 + N_3 \sim NB(6, \frac{1}{2})$

$P(X=k) = \binom{6+k-1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{6+k}$

$P(X=3) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{14}{128}$

Zadanie 4.

Proces pojawiania się szkód startuje w momencie $T_0 = 0$. Niech T_n oznacza moment zajścia n-tej szkody. Ponieważ szkody numerujemy według kolejności zajścia, wobec tego zachodzi $0 < T_1 < T_2 < \dots$.

Wypłata odszkodowania za n-tą szkodę następuje w momencie $T_n + D_n$. Załóżmy, iż zmienne losowe: $T_1, \quad (T_2 - T_1), \quad (T_3 - T_2), \quad \dots$

oraz: $D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad \dots$

są wszystkie nawzajem niezależne i mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.

Prawdopodobieństwo, iż dla pewnego ustalonego n wypłata odszkodowania za szkodę $n+2$-gą poprzedzi wypłatę odszkodowania za szkodę n-tą wynosi:

$$P(T_{n+2} + D_{n+2} < T_n + D_n) = P(T_{n+2} - T_n < D_n - D_{n+2}) =$$

$$\left| \begin{array}{l} T_{n+2} - T_n = T_{n+2} - T_{n+1} + T_{n+1} - T_n \sim \Gamma(2,1) \\ D_n, D_{n+2} \sim Exp(1) \end{array} \right|$$

$$= P(\underbrace{T_{n+2} - T_n + D_{n+2}}_{X \sim \Gamma(3,1)} < \underbrace{D_n}_{Y \sim Exp(1)}) =$$

$$= \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{1}{\Gamma(3)} x^2 e^{-x} e^{-y} \, dy \, dx = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^\infty x^2 e^{-x} \left[-e^{-y} \right]_x^\infty dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^\infty x^2 e^{-2x} \, dx = \frac{1}{\Gamma(3)} \cdot \frac{\Gamma(3)}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód $S(t)$ jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi $\lambda = 100$, zaś rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:

$$f_Y(x) = \frac{3}{16}\exp\left(-\frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{32}\exp\left(-\frac{1}{8}x\right)$$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi $c = 750$,

Wiadomo, że przy takich założeniach funkcja prawdopodobieństwa ruiny (jako funkcja wysokości nadwyżki początkowej u) jest postaci:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u),$$

Suma parametrów tego wzoru $(a_1 + a_2)$ wynosi:

$$\Psi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-r_i u}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{1+\theta}$$

$$\theta = \frac{c}{\lambda EY} - 1$$

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{1+\theta}$$

$$EY = \frac{3}{4}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 8 = 5$$

$$c = (1+\theta)\lambda EY$$

$$750 = (1+\theta)\cdot 100\cdot 5$$

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{1+\theta} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 6.

W pewnym ubezpieczeniu szkody zawsze likwidowane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech $X_{t,0}$ oraz $X_{t,1}$ oznaczają łączną wartość szkód zaistniałych w roku t, a likwidowanych w tym samym roku oraz w roku następnym, odpowiednio. Mamy w dyspozycji próbkę obserwacji z lat $t = 1,2,...,n$:

- $X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1}, ..., X_{n,0}, X_{n,1}$.

Zakładamy, że wszystkie powyższe zmienne są niezależne, i mają rozkłady Gamma o parametrach:

$X_{t,0} \sim \Gamma(\alpha_0, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$,

$X_{t,1} \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $\quad t = 1,2,...,n$.

Nie znamy wartości parametrów $(\alpha_0, \alpha_1, \beta)$, w istocie jednak interesuje nas jedynie parametr $\mu_0 := \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1}$

Rozważamy dwa estymatory tego parametru:

$$\hat{\mu}_0 := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \frac{X_{t,0}}{X_{t,0} + X_{t,1}}, \text{ oraz } \hat{\hat{\mu}}_0 := \frac{\sum_{t=1}^{n} X_{t,0}}{\sum_{t=1}^{n} X_{t,0} + \sum_{t=1}^{n} X_{t,1}}$$

Stosunek wariancji tych estymatorów:

$$\frac{\operatorname{var}(\hat{\mu}_0)}{\operatorname{var}(\hat{\hat{\mu}}_0)}$$

wynosi:

$$\sum_{t=1}^{n} X_{t,0} \sim Gamma(n\alpha_0, \beta)$$

$$\sum_{t=1}^{n} X_{t,1} \sim Gamma(n\alpha_1, \beta)$$

$$\hat{\hat{\mu}}_0 \sim Beta(n\alpha_0, n\alpha_1)$$

$$Var(\hat{\hat{\mu}}_0) = \frac{n^2\alpha_0\alpha_1}{(n\alpha_0 + n\alpha_1)^2(n\alpha_0 + n\alpha_1 + 1)}$$

$$\frac{X_{t,0}}{X_{t,0} + X_{t,1}} \sim Beta(\alpha_0, \alpha_1)$$

$$Var(\hat{\mu}_0) = \frac{1}{n^2} n \frac{\alpha_0\alpha_1}{(\alpha_0+\alpha_1)^2(\alpha_0+\alpha_1+1)} = \frac{\alpha_0\alpha_1}{n(\alpha_0+\alpha_1)^2(\alpha_0+\alpha_1+1)}$$

$$\frac{Var(\hat{\mu}_0)}{Var(\hat{\hat{\mu}}_0)} = \frac{\frac{\alpha_0\alpha_1}{n(\alpha_0+\alpha_1)^2(\alpha_0+\alpha_1+1)}}{\frac{n^2\alpha_0\alpha_1}{(n\alpha_0 + n\alpha_1)^2(n\alpha_0+n\alpha_1+1)}} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{n}}{\alpha_0 + \alpha_1 + 1}$$

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:

$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$

gdzie:

- u – to nadwyżka początkowa,
- $S(t)$ - to łączna wartość szkód do momentu t, tworząca złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości λ, z wykładniczymi szkodami o wartości oczekiwanej $1/\beta$
- Parametr intensywności składki wynosi $c = \frac{11\lambda}{10\beta}$

Wiemy, że przy aktualnej wysokości kapitału początkowego u spełniony jest warunek:

- $\Psi(u) = 1/5$.

Udziałowcy postanowili zwiększyć nadwyżkę początkową dwukrotnie. Po tej zmianie prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(2u)$ wyniesie:

$$\theta = \frac{c}{\lambda EY} - 1 = \frac{\frac{11}{10} \cdot \frac{\lambda}{\beta}}{\frac{\lambda}{\beta}} - 1 = \frac{1}{10}$$

$$R = \frac{\beta\theta}{1+\theta} = \frac{\beta \frac{1}{10}}{1 + \frac{1}{10}} = \frac{\beta}{10} \cdot \frac{10}{11} = \frac{\beta}{11}$$

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{1+\theta} = \frac{e^{-\frac{\beta}{11}u}}{\frac{11}{10}} = \frac{10}{11} e^{-\frac{\beta}{11}u} = \frac{1}{5}$$

$$e^{-\frac{1}{11}\beta u} = \frac{11}{50}$$

$$\Psi(2u) = \frac{10}{11}\left(e^{-\frac{\beta}{11}u}\right)^2 = \frac{10}{11}\left(\frac{11}{50}\right)^2 = \frac{11}{250} \approx 0{,}044$$

Odp. C

Zadanie 8.

W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, liniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna $T_1 \in (0,1)$ wyrażająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany gęstością:

- $f_1(t) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}t$.

Niech T_2 oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2 (lata).

Zakładamy że zmienne losowe T_1 oraz T_2 są niezależne. Prawdopodobieństwo, iż szkoda wybrana losowo spośród tych, które zaszły w ciągu roku, pozostanie niezlikwidowana na koniec tego roku, z dobrym przybliżeniem wynosi:

$$\int_0^1 P(T_2 > 1-t \mid T_1 = t)\, f_{T_1}(t)\, dt = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}(1-t)} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}t\right) dt =$$

$$= \frac{4}{5} e^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{\frac{t}{2}}\, dt + \frac{2}{5} e^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 t e^{\frac{t}{2}}\, dt = 0.8$$

Zadanie 9.

W pewnym ubezpieczeniu proces pojawiania się szkód jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą 2, a wartości pojedynczych szkód (niezależne nawzajem i od procesu pojawiania się szkód) mają rozkład ciągły o gęstości równej 1 na przedziale $(0,1)$.

Ubezpieczony stosuje następującą strategię zgłaszania szkód w ciągu roku:

- Nie zgłasza szkód, dopóki nie zdarzy mu się szkoda o wartości przekraczającej ½
- Zgłasza pierwszą szkodę, która przekroczyła wartość ½, po czym zgłasza ewentualne następne szkody bez względu na to, jaka jest ich wartość.

Charakter ubezpieczenia jest przy tym taki, że decyzja o niezgłoszeniu danej szkody jest nieodwołalna – nie ma więc możliwości zgłoszenia danej szkody dopiero wtedy, kiedy zajdzie któraś z następnych szkód.

Oczekiwana wartość szkód zgłoszonych w ciągu roku z tego ubezpieczenia wynosi (z dobrym przybliżeniem):

Zadanie 10.

Pewien podmiot posiada wyjściowy majątek o wartości w, i narażony jest na stratę X. Strata X jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

$\Pr(X=1)=q$, $\Pr(X=0)=1-q$

Rynek ubezpieczeniowy oferuje kontrakty ubezpieczeniowe wypłacające αX za szkodę w wysokości X dla dowolnych $\alpha \in (0,1]$, w zamian za składkę w wysokości $(1+\theta)\cdot q\cdot\alpha$.

Podmiot ten postępuje racjonalnie, a w swoich decyzjach kieruje się maksymalizacją oczekiwanej użyteczności, przy czym jego funkcja użyteczności jest postaci: $u(x)=-\exp(-x)$.

Jeśli założymy, że $\theta=1/8$, zaś $q=1/9$, wtedy podmiot, o którym mowa, osiągnie maksimum oczekiwanej użyteczności wybierając kontrakt z pokryciem równym (wybierz najlepsze przybliżenie):

$$E\left[-e^{-(w-X+\alpha X-(1+\theta)q\alpha)}\right] \to max$$

$$E\left[-e^{-w+X-\alpha X+(1+\theta)q\alpha}\right]$$

$$E\left[e^{X-\alpha X}\right]e^{(1+\theta)q\alpha} \to min$$

$$E\left[e^{X-\alpha X}\right]=E\left[e^{X(1-\alpha)}\right]=q\,e^{(1-\alpha)\cdot 1}+e^{(1-\alpha)\cdot 0}(1-q)=$$

$$=e^{1-\alpha}q+1-q=\frac{1}{9}e^{1-\alpha}+\frac{8}{9}$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{1}{9}e^{1-\alpha}+\frac{8}{9}\right)e^{\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{9}\alpha}=\left(\frac{1}{9}e^{1-\alpha}+\frac{8}{9}\right)e^{\frac{1}{8}\alpha}=\frac{1}{9}e\cdot e^{-\frac{7}{8}\alpha}+\frac{8}{9}e^{\frac{1}{8}\alpha}$$

$$f'(\alpha)=\frac{1}{9}e\cdot e^{-\frac{7}{8}\alpha}\left(-\frac{7}{8}\right)+\frac{8}{9}e^{\frac{1}{8}\alpha}\cdot\frac{1}{8}=0$$

$$\frac{7}{8}e\,e^{-\frac{7}{8}\alpha}=e^{\frac{1}{8}\alpha}$$

$$\frac{7}{8}e=e^{\alpha}$$

$$\alpha=\ln\left(\frac{7}{8}\right)+1\approx 87\%$$

Odp. D